

Introducción al **CÁLCULO INTEGRAL**

$$\int f(x) dx$$

Danny Joel Apaza Nuñez
Lucio Elias Flores Bustinza
Elber Rogelio Vera Rodriguez



UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA

Introducción al Cálculo Integral

**Danny Joel Apaza Nuñez
Lucio Elias Flores Bustinza
Elber Rogelio Vera Rodriguez**



UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

DR. AMÉRICO GUEVARA PÉREZ
Rector

PH.D. HÉCTOR GONZÁLES MORA
Vicerrector Académico

DRA. PATRICIA GIL KODAKA
Vicerrectora de Investigación

DR. JOSÉ CARLOS VILCAPOMA
Jefe del Fondo Editorial

DANNY J. APAZA NUÑEZ - LUCIO E. FLORES BUSTINZA - ELBER R. VERA RODRIGUEZ
Introducción al Cálculo Integral

Lima: 2024; 198 p.

© Danny Joel Apaza Nuñez

© Lucio Elías Flores Bustinza

© Elber Rogelio Vera Rodriguez

© Universidad Nacional Agraria La Molina
Av. La Molina s/n La Molina, Lima, Perú

Derechos reservados

ISBN: N° 978-612-5086-34-1

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-08621

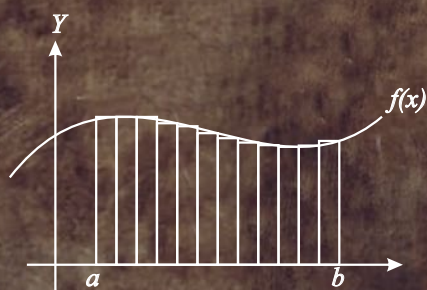
Primera edición digital: agosto de 2024

Disponible en: <https://fondoeditorialunalm.com/ebooks/>

Diseño y diagramación:
Daniella Luna Barrios

Queda terminantemente prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, químico, óptico, incluyendo sistema de fotocopiado, sin autorización escrita de los autores.

Todos los conceptos expresados en la presente obra son responsabilidad de los autores.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Índice general

1	La antiderivada - La integral indefinida	9
1.1	La antiderivada	9
1.2	La Integral indefinida	11
1.3	Integrales inmediatas	13
1.3.1	Integrales inmediatas del tipo potencial	13
1.3.2	Integral inmediata para sumas y diferencias	15
1.3.3	Integral inmediata de x^{-1}	15
1.3.4	Integral inmediata de funciones exponenciales	16
1.3.5	Integral inmediata para el seno y coseno	17
1.3.6	Integrales inmediatas de la tangente, cotangente, secante y cosecante	18
1.3.7	Ejercicios propuestos	20
2	Cambio de variable	21
2.1	Método	21
2.2	Ejercicios resueltos	24
2.3	Ejercicios propuestos	41
3	Integración por partes	47
3.1	Método	47
3.2	Ejercicios resueltos	48
3.3	Ejercicios propuestos	62

4	Integrales de funciones trigonométricas	65
4.1	Producto de potencias de senos y cosenos	65
4.2	Producto de senos y cosenos	68
4.3	Potencias de: tangentes; cotangentes	69
4.4	Potencias de: secante; cosecante	71
4.5	Producto de potencias de tangentes y secantes	73
4.6	Ejercicios resueltos	76
4.7	Ejercicios propuestos	84
5	Integración por sustitución trigonométrica	87
5.1	Sustitución trigonométrica	87
5.2	Ejercicios resueltos	89
5.3	Ejercicios propuestos	99
6	Integración de funciones racionales	103
6.1	Función racional	103
6.2	Descomposición en fracciones parciales	104
6.2.1	Caso I. Factores lineales no repetidos	104
6.2.2	Caso II. Factores lineales repetidos	105
6.2.3	Caso III. Factores cuadráticos no factorizables y no repetidos	106
6.2.4	Caso IV. Factores cuadráticos no factorizables y repetidos .	107
6.3	Ejercicios resueltos	108
6.4	Funciones racionales de senos y cosenos	114
6.5	Ejercicios resueltos	117
6.6	Ejercicios propuestos	123
7	La integral definida	125
7.1	Introducción	125
7.2	Cálculo de áreas	126
7.3	La integral definida	130
7.4	Interpretación geométrica de la integral definida	132
7.5	Primer teorema fundamental del cálculo (1TFC)	135
7.6	Segundo teorema fundamental del cálculo (2TFC)	138

7.7	Propiedades de la integral definida	139
7.8	Ejercicios resueltos	142
7.9	Ejercicios propuestos	171
8	Integrales impropias	173
8.1	Integrales impropias de límites infinitos	173
8.2	Integrales impropias con límites finitos	175
8.3	Ejercicios resueltos	177
8.4	Función Gamma	184
8.5	Función Beta	188
8.6	Ejercicios propuestos	193
8.7	Algunas fórmulas	195

Prólogo

El acelerado avance de la ciencia y tecnología en este casi primer cuarto de siglo XXI, nos invita a reflexionar y a priorizar qué contenidos deberían de formar parte de la curricula de un curso de cálculo integral. En la consecución de este objetivo, tratamos que a través de una sinergia de profesores con experiencia en el dictado del curso, brinden un material de mucho valor tanto didáctico como práctico, que será parte elemental en la formación de los estudiantes de ciencias e ingeniería.

Integrar tiene su arte por la destreza que supone elegir un método adecuado e introducir cambios de variables oportunos que simplifiquen los cálculos. El lector que se ejercite con los ejercicios resueltos de este libro podrá comprobar que va adquiriendo hábitos mentales en el cálculo de integrales, que le permitirán resolver los ejercicios propuestos, y nos recuerda esa frase de autor desconocido que dice: **Puede parecer difícil al principio, pero todo al principio es difícil.**

Esta obra intitulada Introducción al cálculo integral, esta dirigido a estudiantes de ciencias e ingeniería. Su propósito es el de proporcionar una exposición flexible de los métodos de integración que es la parte principal de este texto, los temas fueron divididos por capítulos, los cuales abarcan los siguientes temas:

En el capítulo uno, se trata el tema de la antiderivada de una función y como esta se puede interpretar como la integral indefinida; en el capítulo dos, se aborda una de las técnicas que nos permite determinar la integral indefinida de una función, como es el cambio de variable, y es un método que emplearemos constantemente a lo largo de todo el libro; en el capítulo tres, se explica otra técnica de integración sumamente empleada, llamada integración por partes, y se aplica cuando aumenta el grado de dificultad para hallar la integral indefinida. Se presenta varios casos y con una diversidad de ejemplos; en el capítulo cuatro, se enfoca cuando el integrando contiene operaciones combinadas con funciones trigonométricas, en donde se debe de adecuar estas funciones para poder aplicar el método de solución adecuado; en el capítulo cinco, se aborda la técnica de integración por sustitución trigonométrica, que nos permite poder integrar ciertas funciones que presenten una estructura definida; en el capítulo seis, se explica la integración de funciones racionales, en donde se aplica la descomposición en fracciones parciales y también se ve los casos de funciones racionales de seno y coseno; en el capítulo siete, se discute y profundiza el concepto de la integral definida, desde sus orígenes hasta su definición formal a través de sumas de Riemann; en el capítulo ocho, se toca los temas de la integral impropia, donde se determina su convergencia o divergencia y también se estudian las funciones gamma y beta.

En todos estos capitulos, se presta una atención especial en los ejemplos resueltos, además de un buen número de ejercicios propuestos con la mayoría de ellos con respuestas.

Como se aprecia, los autores desean presentar este material como ayuda en el aprendizaje. Esperamos que les pueda servir y estamos atentos ante cualquier observación o sugerencia que usted amable lector, nos pueda brindar.

Aprovechamos la oportunidad para expresar nuestro agradecimiento a los colegas del Departamento Académico de Matemática de la UNALM, en especial a su Director, Mg. Alessandri Canchoa Quispe por su tiempo, amistad y las valiosas sugerencias brindadas en la elaboración del texto.

Muchas gracias por su atención.

Los autores

1. La antiderivada - La integral indefinida

1.1 La antiderivada

Lea detenidamente cada pregunta y responda:

1. ¿Cuál es la derivada de $F(x) = x^4$?
.
¿Cuál es la regla de correspondencia de la función cuya derivada es $f(x) = 4x^3$?
.
¿Cuál es la relación entre $F(x) = x^4$ y $f(x) = 4x^3$?
.
2. ¿Cuál es la regla de correspondencia $F(x)$ de la función cuya derivada es $f(x) = e^x$?
.
3. ¿Cuál es la regla de correspondencia $F(x)$ de la función cuya derivada es $f(x) = \sec x \tan x$?
.
4. ¿Cuál es la regla de correspondencia $F(x)$ de la función cuya derivada es $f(x) = \sec^2 x$?
.
¿Qué relación se cumple entre f y F en todas las preguntas anteriores?
.

En cada uno de los resultados anteriores a F se le conoce como **una antiderivada** de la función f dada. Así:

x^4 es una antiderivada de $4x^3$, e^x es una antiderivada de e^x , etc.

¿Las antiderivadas de dichas funciones serán únicas?

Antes de responder está pregunta, definimos

Definición 1.1.1 Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, a una función $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se le denomina **antiderivada o primitiva** de f en un intervalo I , si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Ahora, con la finalidad de precisar el concepto de la antiderivada, conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la derivada de $F(x) = x^4 + 5$?
2. ¿Cuál es la derivada de $F(x) = x^4 + 0,75$?
3. ¿Cuál es la derivada de $F(x) = x^4 + \cos 5$?

Como podemos observar, las tres funciones anteriores tienen como resultado la misma función derivada, igual a $4x^3$, lo que nos lleva a concluir que la antiderivada no es única.

Una antiderivada más general sería $F(x) = 4x^3 + C$ donde C es una constante arbitraria.

Definición 1.1.2 Si F es una antiderivada de f en un intervalo I , la antiderivada general de f en I está dada por:

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

■ **Ejemplo 1** Determine la antiderivada general de la función $f(x) = \text{sen } x$

Solución

El objetivo es hallar una función $F(x)$ cuya derivada sea $f(x)$, entonces

$$F'(x) = f(x)$$

$$= \text{sen } x$$

Expresando $f(x)$ como la derivada de una función

$$= (-\cos x)'$$

$$\text{Luego: } F(x) = -\cos x + C$$

■

■ **Ejemplo 2** Determine la antiderivada general de la función

$$f(x) = \frac{e^{\ln \sqrt[5]{x}} + x^{3/2} + x \cos^2 x}{x}$$

Solución

El objetivo es hallar una función $F(x)$ cuya derivada sea $f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &= \frac{e^{\ln \sqrt[5]{x}} + x^{3/2} + x \cos^2 x}{x} = \frac{e^{\ln \sqrt[5]{x}}}{x} + \frac{x^{3/2}}{x} + \frac{x \cos^2 x}{x} \\ &= \frac{\sqrt[5]{x}}{x} + x^{1/2} + \cos^2 x = x^{-4/5} + x^{1/2} + \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &\quad \text{Expresando } f(x) \text{ como la derivada de una función} \\ &= \left(5x^{1/5} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right)' \\ \text{Luego: } F(x) &= 5x^{1/5} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

■

1.2 La Integral indefinida

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y F una antiderivada de f en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, entonces a su antiderivada general $F(x) + C$ se denomina la **integral indefinida de f respecto a x** y se denota por

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Se cumplen

$$i) \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

$$ii) \int dF(x) = F(x) + C$$

■ **Ejemplo 3** Usando la definición de integral indefinida, compruebe si la siguiente igualdad es cierta.

$$\int \frac{2x^4}{5\sqrt{x^5+4}} dx = \sqrt{x^5+4} + C, \text{ donde } C \text{ es una constante arbitraria.}$$

Solución

Debemos averiguar si $F'(x) = f(x)$, donde

$$F(x) = \sqrt{x^5+4} + C \text{ y } f(x) = \frac{2x^4}{5\sqrt{x^5+4}}$$

Se tiene

$$F'(x) = \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+4}} \neq f(x)$$

Por lo tanto se concluye que la igualdad no es cierta.

■

■ **Ejemplo 4** Usando la definición de integral indefinida, compruebe si la siguiente igualdad es cierta.

$$\int \cos^3 x dx = -\frac{1}{3} \sin^3 x + \sin x + C, \text{ donde } C \text{ es una constante arbitraria.}$$

Solución

Debemos averiguar si $F'(x) = f(x)$ donde

$$F(x) = -\frac{1}{3} \sin^3 x + \sin x + C \text{ y } f(x) = \cos^3 x$$

Se tiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\sin^2 x \cos x + \cos x = \cos x (1 - \sin^2 x) \\ &= \cos x \cos^2 x = \cos^3 x \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Luego se concluye que la igualdad es cierta. ■

■ **Ejemplo 5** Halle la antiderivada de $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$, cuya gráfica pasa por el punto $(1, 3)$.

Solución

Sea $F(x)$ la antiderivada de la función $f(x)$, entonces

$$F'(x) = f(x) = 6x^2 - 8x + 3$$

Expresando $f(x)$ como la derivada de una función:

$$F'(x) = f(x) = (2x^3 - 4x^2 + 3x)'$$

Luego

$$F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + C$$

Como la gráfica de F pasa por el punto $(1, 3)$ se cumple $F(1) = 3$, para $x = 1$

$$F(1) = 2(1)^3 - 4(1)^2 + 3(1) + C = 3,$$

se obtiene

$$C = 2$$

Reemplazando se obtiene la antiderivada solicitada

$$F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2.$$

■

1.3 Integrales inmediatas

Es posible integrar una función si se conoce una antiderivada; esto es, una integral indefinida; mostramos al final del capítulo un resumen de las integrales básicas que se debe manejar para facilitar el cálculo de las integrales indefinidas.

1.3.1 Integrales inmediatas del tipo potencial

Como $dx^{n+1} = (n+1)x^n dx$, se obtiene

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{donde } n \neq -1$$

■ **Ejemplo 6** Determine $\int x^2 dx$

Solución

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

■ **Ejemplo 7** Determine $\int x^5 dx$

Solución

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

■ **Ejemplo 8** Determine $\int \sqrt[3]{x} dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x} dx &= \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\ &= \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 9** Determine $\int \frac{1}{x^5} dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^5} dx &= \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C \\ &= -\frac{1}{4x^4} + C\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 10** Determine $\int 3 dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int 3 dx &= 3 \int x^0 dx = 3 \frac{x^{0+1}}{0+1} + C \\ &= 3x + C\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 11** En general

$$\int k dx = k \int dx = kx + C$$

Al asignar valores específicos a la constante C , se obtiene una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra.

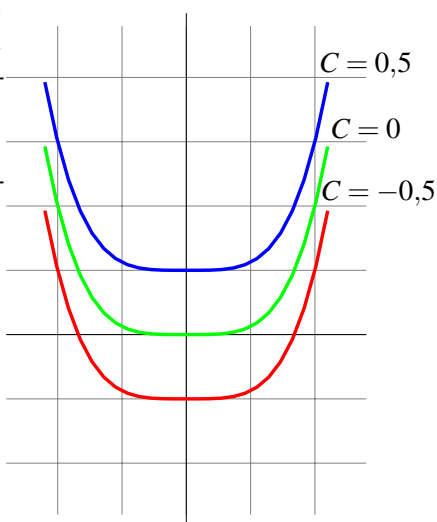
Así por ejemplo, la integral indefinida de $4x^3$, cuyo resultado es $x^4 + C$.

Escribimos

$$\int 4x^3 dx = x^4 + C$$

A continuación en la familia de funciones $x^4 + C$ mostramos las gráficas para los valores

$C = -0,5$, $C = 0$ y $C = 0,5$



1.3.2 Integral inmediata para sumas y diferencias

Se cumplen las siguientes propiedades

$$a) \int Mf(x)dx = M \int f(x)dx$$

$$b) \int [Mf(x) + Ng(x)]dx = M \int f(x)dx + N \int g(x)dx$$

$$c) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

donde M y N son constantes.

■ **Ejemplo 12** Determine $\int \left[2x^3 + \frac{3}{x^2} - 7 \right] dx$

Solución

Aplicando la propiedad $b)$

$$\begin{aligned} \int \left[2x^3 + \frac{3}{x^2} - 7 \right] dx &= 2 \int x^3 dx + 3 \int x^{-2} dx - \int 7 dx \\ &= \left[\frac{x^4}{2} + C_1 \right] + \left[\frac{3x^{-1}}{-1} + C_2 \right] - [7x + C_3] \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{3}{x} - 7x + C \end{aligned}$$

Donde $C = C_1 + C_2 - C_3$ ■

1.3.3 Integral inmediata de x^{-1}

Como $d \ln |x| = \frac{1}{x} dx$, se obtiene

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \text{ para } x \neq 0$$

■ **Ejemplo 13** Determine $\int 7x^{-1} dx$

Solución

Tenemos

$$\int 7x^{-1} dx = 7 \int \frac{1}{x} dx = 7 \ln |x| + C$$

■

■ Ejemplo 14

$$\int \left[\frac{x^3+2}{x} \right] dx = \int x^2 dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| + C$$

1.3.4 Integral inmediata de funciones exponenciales

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

Cuando la base es el número de Neper e se trata de un caso especial

$$\int e^x dx = e^x + C$$

■ Ejemplo 15

$$\int \frac{7^x 2^{x+1}}{5^{x+2}} dx = \int \frac{(2)14^x}{(25)5^x} dx = \frac{2}{25} \int \left(\frac{14}{5} \right)^x dx = \frac{2}{25} \frac{\left(\frac{14}{5} \right)^x}{\ln \left(\frac{14}{5} \right)} + C$$

■ Ejemplo 16 Determine $\int \left(\frac{5x^5 e^x + 2x - \sqrt[4]{x^9}}{x^5} \right) dx$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{5x^5 e^x + 2x - \sqrt[4]{x^9}}{x^5} \right) dx = \int \left(\frac{5x^5 e^x}{x^5} + \frac{2x}{x^5} - \frac{\sqrt[4]{x^9}}{x^5} \right) dx \\ &= \int \left(5e^x + 2x^{-4} - x^{-11/4} \right) dx = 5e^x + \frac{2x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-7/4}}{-7/4} + C \\ &= 5e^x - \frac{2}{3x^3} + \frac{4}{7x^{7/4}} + C \end{aligned}$$

■ Ejemplo 17 Determine $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Solución

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \left(x^{-1/3} - x^{1/6} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} x^{2/3} - \frac{6}{7} x^{7/6} + C \end{aligned}$$

1.3.5 Integral inmediata para el seno y coseno

$$a) \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

$$b) \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$c) \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$d) \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$e) \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$f) \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

■ **Ejemplo 18** Determine $\int (4x^3 + 7\cos x - 3e^x - 6) \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int (4x^3 + 7\cos x - 3e^x - 6) \, dx \\ &= 4 \int x^3 \, dx + 7 \int \cos x \, dx - 3 \int e^x \, dx - 6 \int dx \\ &= x^4 + 7\operatorname{sen} x - 3e^x - 6x + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 19** Determine $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx$

Solución

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \tan x \sec x \, dx = \sec x + C$$

■ **Ejemplo 20** Calcule $\int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} \, dx$

Solución

Usamos la identidad $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ para simplificar el integrando.

$$\begin{aligned} \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} &= \frac{(\sec x + \tan x)(\sec x + \tan x)}{(\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x)} \\ &= \frac{\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x}{\sec^2 x - \tan^2 x} \\ &= \frac{\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1}{\tan^2 x + 1 - \tan^2 x} \\ &= 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1 \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} dx &= \int (2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1) dx \\ &= 2 \int \sec^2 x dx + 2 \int \sec x \tan x dx - \int dx \\ &= 2 \tan x + 2 \sec x - x + C\end{aligned}$$

■

1.3.6 Integrales inmediatas de la tangente, cotangente, secante y cosecante

$$a) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C$$

$$b) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C = -\ln |\csc x| + C$$

$$c) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$d) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C = -\ln |\csc x + \cot x| + C$$

■ **Ejemplo 21** Determine $\int \frac{2 \cos x}{3 \sin x} dx$

Solución

$$I = \int \frac{2 \cos x}{3 \sin x} dx = \frac{2}{3} \int \cot x dx$$

$$I = \frac{2}{3} \ln |\sin x| + C$$

■

■ **Ejemplo 22** Determine $\int \left[\frac{4}{\cos x} - \frac{5}{\sin x} \right] dx$

Solución

$$\begin{aligned}I &= \int \left[\frac{4}{\cos x} - \frac{5}{\sin x} \right] dx = 4 \int \frac{dx}{\cos x} - 5 \int \frac{dx}{\sin x} \\ &= 4 \int \sec x dx - 5 \int \csc x dx\end{aligned}$$

$$I = 4 \ln |\sec x + \tan x| - 5 \ln |\csc x - \cot x| + C$$



Tabla de Integrales Inmediatas

$$1) \int dx = x + C$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; (n \neq -1)$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$5) \int e^x dx = e^x + C$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8) \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$9) \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$10) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$11) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$12) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$13) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, a > 0, \quad 15) \int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

$$16) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, a > 0 \quad 17) \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

Estas integrales inmediatas se cumplen si se reemplaza x por z , t , u o $u(x)$.

A veces, el conocimiento de fórmulas elementales de derivadas nos permitirá integrar una función dada. Sin embargo, este enfoque puede resultar ineficaz, especialmente en vista del siguiente hecho sorprendente: existen integrales indefinidas que no pueden evaluarse en términos de combinaciones finitas de las funciones elementales. Por ejemplo

$$1. \int e^{-x^2} dx$$

$$2. \int \cos(x^2) dx$$

$$3. \int \sin(x^2) dx$$

$$4. \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

La existencia de estos ejemplos indica que no siempre podemos reducir la integración a un proceso rutinario como la diferenciación. Sin embargo, estas integrales desempeñan un papel importante en diferentes problemas de física.

1.3.7 Ejercicios propuestos

$$1. \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} dx$$

$$2. \int \sec^{-1} x dx$$

$$3. \int \frac{1}{9 + \sqrt{9x^4}} dx$$

$$4. \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

$$5. \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x} dx$$

$$6. \int (5e^x + 3 \cot^2 x) dx$$

$$7. \int \sqrt[3]{x}(x^4 + 2x^3 - 2) dx$$

$$8. \int \cot^2 x dx$$

$$9. \int \left(\frac{a^x - b^x}{a^x b^x} \right) dx$$

$$\text{Rpta. } -\frac{1}{b^x \ln b} + \frac{1}{a^x \ln a} + C$$

$$10. \int \frac{1}{3x^2 + 5} dx$$

$$\text{Rpta. } \sqrt{\frac{1}{15}} \arctan \left(\sqrt{\frac{3}{5}} x \right) + C$$

$$11. \int \frac{1}{7x^2 - 8} dx$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{4\sqrt{14}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{8/7}}{x + \sqrt{8/7}} \right| + C$$

$$12. \int 3^{-x} dx$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$14. \text{ Halle una antiderivada de la función } f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \text{ que pase por el punto } (3, 5)$$

2. Cambio de variable

2.1 Método

Una integral de apariencia complicada puede transformarse en una más simple, que resulta una integral inmediata, mediante una sustitución (o cambio de variable) adecuada.

El procedimiento de la sustitución en la integración es comparable con la regla de la cadena "a la inversa". Recordemos la regla de la cadena entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Usando la definición de integral indefinida se tiene

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C$$

Sea

$$\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{cases}$$

al sustituirse en la integral $\int f'(u)du = f(u) + C = f(g(x)) + C$

Cuando el integrando es de la forma $f(u(x))u'(x)$ se puede reescribir toda la integral en términos de u y de su diferencial du

$$\int \underbrace{f(u(x))}_{f(u)} \underbrace{u'(x)dx}_{du} = \int f(u)du$$

Esta ecuación se denomina **fórmula del cambio de variables**. Transforma una integral en la variable x , en una integral en la nueva variable u que se espera sea más simple.

Criterio para integrar por sustitución

1. Escoger u convenientemente y calcular du .
2. Reescribir la integral en función de u y de du e integrar.
3. Expresar el resultado final en función de x .

■ **Ejemplo 23** Determine $\int \sin(4x) dx$

Solución

Sea $u = 4x$, tenemos $du = 4 dx$, de esta forma reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}\int \sin(4x) dx &= \int \underbrace{\sin(4x)}_u \underbrace{dx}_{\frac{1}{4} du} = \int \sin u \frac{du}{4} = -\frac{1}{4} \cos u + C \\ &= -\frac{\cos(4x)}{4} + C\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 24** Verifique $\int \cot x dx$

Solución

Expresamos el integrando en términos de seno y coseno, sea $u = \sin x$, tenemos $du = \cos x dx$, reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}\int \cot x dx &= \int \frac{\overbrace{\cos x dx}^{du}}{\underbrace{\sin x}_u} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \\ &= \ln |\sin x| + C\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 25** Determine $\int 2x \cos(x^2) dx$

Solución

Sea $u = x^2$, tenemos $du = 2x dx$, de esta forma reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}\int 2x \cos(x^2) dx &= \int \underbrace{\cos(x^2)}_{\cos u} \underbrace{2x dx}_{du} = \int \cos u du = \sin u + C \\ &= \sin(x^2) + C\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 26** Determine $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Solución

Solución 1: Sea $u = x^2 - 1$, tenemos $du = 2x dx$, de modo que $\frac{1}{2} du = x dx$, de esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{\overbrace{x dx}^{\frac{1}{2} du}}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\sqrt{u}}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C \\ &= \sqrt{x^2-1} + C \end{aligned}$$

Solución 2: Otra posible sustitución es $u^2 = x^2 - 1$, entonces $2u du = 2x dx$, de esta forma

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{\overbrace{x dx}^{u du}}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_u} = \int \frac{u du}{u} = \int du = u + C \\ &= \sqrt{x^2-1} + C \end{aligned}$$

■

El reto en la aplicación de la fórmula de cambio de variable es pensar en una sustitución apropiada; con este ejemplo podemos decir que el cambio de variable no es único y algunas elecciones de u pueden ser mejores que otras. Si su primera sustitución no funciona intente con otra.

■ **Ejemplo 27** Determine $\int \sen x \cos x dx$

Solución

Solución 1: Sea $u = \sen x$, tenemos $du = \cos x dx$

$$\begin{aligned} \int \sen x \cos x dx &= \int \underbrace{\sen x}_u \underbrace{\cos x dx}_{du} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{\sen^2 x}{2} + C \end{aligned}$$

Solución 2: Sea $u = \cos x$, tenemos $du = -\sin x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x \, dx &= \int \underbrace{\cos x}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{-du} = -\int u \, du = -\frac{u^2}{2} + C \\ &= -\frac{\cos^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

Aparentemente tenemos dos respuestas diferentes al resolver $\int \sin x \cos x \, dx$, sin embargo, ambas respuestas son equivalentes como mostramos a continuación

$$\begin{aligned}-\frac{\cos^2 x}{2} + C_1 &= -\frac{1 - \sin^2 x}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 x}{2} + C_1 \\ &= \frac{\sin^2 x}{2} + \underbrace{C_1 - \frac{1}{2}}_C = \frac{\sin^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

2.2 Ejercicios resueltos

En algunos ejemplos siempre que aparezca en el integrando una función racional (estudio posterior), es conveniente antes de resolverlas por un procedimiento específico, ver si el numerador es al menos en su parte variable la derivada del denominador, se podrá ajustar con constantes, y será una integral inmediata del tipo logarítmico. Veamos el siguiente ejemplo

■ **Ejemplo 28** Determine $\int \frac{x}{x^2 + 5} \, dx$

$$\int \frac{x}{x^2 + 5} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 5} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 5| + C$$

■ **Ejemplo 29** Determine $\int \frac{12x^2 - 14}{2x^3 - 7x + 5} \, dx$

Solución

$$\int \frac{12x^2 - 14}{2x^3 - 7x + 5} \, dx = 2 \int \frac{6x^2 - 7}{2x^3 - 7x + 5} \, dx = 2 \ln |2x^3 - 7x + 5| + C$$

■ **Ejemplo 30** Determine $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$

Solución

$$\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = - \int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = -\ln |\operatorname{sen} x + \cos x| + C$$

■

■ **Ejemplo 31** Halle la antiderivada de $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+2\cos(2x)}$, cuya gráfica pasa por el punto $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

Solución

Sea $F(x)$ la antiderivada de la función $f(x)$, entonces

$$F(x) = \int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+2\cos(2x)} dx.$$

Haciendo $u^2 = 1 + 2\cos(2x)$, se tiene $2udu = -4\operatorname{sen}(2x)dx$ de donde $\operatorname{sen}(2x)dx = -\frac{u}{2} du$. Luego

$$\begin{aligned} F(x) &= \int -\frac{u^2}{2} du = -\frac{u^3}{6} + C \\ &= -\frac{\left(\sqrt{1+2\cos(2x)}\right)^3}{6} + C. \end{aligned}$$

Como la gráfica de F pasa por el punto $(\frac{\pi}{4}, 0)$, para $x = \frac{\pi}{4}$ tenemos que $F(\frac{\pi}{4}) = 0$, entonces $C = \frac{1}{6}$.

$$\text{Reemplazando } F(x) = -\frac{\left(\sqrt{1+2\cos(2x)}\right)^3}{6} + \frac{1}{6}.$$

■

■ **Ejemplo 32** Halle la antiderivada de $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(x)+4}$ cuya gráfica pasa por el punto $(\pi, 0)$.

Solución

Sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$ entonces $F'(x) = f(x)$, es decir

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(x)+4} dx.$$

Haciendo $u = \cos^2(x) + 4$, se tiene $du = -2\cos(x)\operatorname{sen}(x)dx = -\operatorname{sen}(2x)dx$. Sustituyendo en la integral anterior

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(x)+4} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos^2(x)+4| + C.$$

Como la gráfica de F pasa por el punto $(\pi, 0)$, para $x = \pi$, tenemos que $F(\pi) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} F(\pi) &= -\ln|\cos^2(\pi) + 4| + C = 0 \\ C &= \ln 5 \end{aligned}$$

Reemplazando

$$F(x) = -\ln|\cos^2(x) + 4| + \ln 5.$$

■ **Ejemplo 33** Calcule la antiderivada general de $\frac{f(x)}{\cos^2 x}$, si $h(x) = \sin^2 x + \cos x$ es una antiderivada para f .

Solución

Como h es una antiderivada para f , entonces

$$f(x) = h'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x.$$

La antiderivada general

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \left(\frac{f(x)}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{2\sin x \cos x - \sin x}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= 2 \int \tan x \, dx - \int \sec x \tan x \, dx = 2 \ln|\sec x| + \sec x + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 34** Halle la antiderivada general de la función $h(x) = xf(x)$, si $F(x) = \arctan(2x) + \ln(x^2 + 1)$ es una antiderivada de f .

Solución

Sea $H(x)$ la antiderivada de la función $h(x)$, entonces

$$H(x) = \int xf(x) dx.$$

Ya que $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) = \frac{1}{1 + (2x)^2} (2x)' + \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' \\ &= \frac{2}{1 + (2x)^2} + \frac{2x}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 H(x) &= \int x f(x) dx = \int \left(\frac{2x}{1+(2x)^2} + \frac{2x^2}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \int \left(\frac{2x}{1+(2x)^2} \right) dx + \int \left(\frac{2x^2}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{8x}{1+4x^2} \right) dx + 2 \int \left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \ln|1+4x^2| + 2 \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \ln|1+4x^2| + 2 \int dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{4} \ln|1+4x^2| + 2x - 2 \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 35** Halle la antiderivada de $g(x) = e^{-x} - \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$, cuya gráfica pasa por el punto $(0, 4)$.

Solución

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \int g(x) dx = \int \left(e^{-x} - \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \right) dx \\
 &= \int e^{-x} dx - \int \left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \right) dx \\
 &= -e^{-x} - \underbrace{\int \left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \right) dx}_I.
 \end{aligned}$$

Integrando I . Sea $u^2 = 1 + 2x^2$, tenemos $2udu = 4xdx$.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{u}{u} du \\
 &= \frac{u}{2} + C = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2} + C.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en $G(x)$ tenemos

$$G(x) = -e^{-x} + \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2} + C.$$

Además como la gráfica de $G(x)$ pasa por el punto $P(0, 4)$, nos indica que cuando $x = 0$, tenemos que $G(0) = 4$, entonces

$$\begin{aligned} G(0) &= -e^{-(0)} + \frac{\sqrt{1+2(0)^2}}{2} + C = 4 \\ -1 + \frac{1}{2} + C &= 4 \\ C &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Reemplazando

$$G(x) = -e^{-x} + \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2} + \frac{9}{2}.$$

■ **Ejemplo 36** Halle m , n , p y q , para que

$F(x) = m \operatorname{sen}(nx) + \arctan x + px + qe^{2x} + C$, sea la antiderivada general de

$$f(x) = \cos(3x) + \frac{2x^2+3}{x^2+1} + 6e^{2x}$$

Solución

Como $F(x)$ es la antiderivada general de la función $f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ mn \cos(nx) + \frac{1}{1+x^2} + p + 2qe^{2x} &= \cos(3x) + \frac{1}{x^2+1} + 2 + 6e^{2x} \end{aligned}$$

comparando $n = 3$, $3m = 1$, $p = 2$, $2q = 6$ obtenemos que $m = \frac{1}{3}$, $n = 3$, $p = 2$ y $q = 3$. ■

■ **Ejemplo 37** Determine $\int 4x^3 \cos(x^4) dx$

Solución

Sea $u = x^4$, tenemos $du = 4x^3 dx$

$$\begin{aligned} \int 4x^3 \cos(x^4) dx &= \int \cos(x^4) 4x^3 dx = \int \cos u du = \operatorname{sen} u + C \\ &= \operatorname{sen}(x^4) + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 38** Determine $\int \frac{2x + \tan^2 x + 2}{(x^2 + \tan x + x)^{4/3}} dx$

Solución

Usando $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$I = \int \frac{2x + \tan^2 x + 2}{(x^2 + \tan x + x)^{4/3}} dx = \int \frac{2x + \sec^2 x + 1}{(x^2 + \tan x + x)^{4/3}} dx$$

Sea $u = x^2 + \tan x + x$, tenemos $du = (2x + \sec^2 x + 1)dx$

$$\begin{aligned} I &= \int u^{-4/3} du = -3u^{-1/3} + C \\ &= -3(x^2 + \tan x + x)^{-1/3} + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 39** Determine $\int (x + \operatorname{sen} x)^{1/3} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

Solución

Usando $\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \cos A}{2}$

$$I = \int (x + \operatorname{sen} x)^{1/3} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int (x + \operatorname{sen} x)^{1/3} (1 + \cos x) dx.$$

Sea $u^3 = x + \operatorname{sen} x$, tenemos $3u^2 du = (1 + \cos x) dx$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int u (3u^2 du) = \frac{3}{2} \int u^3 du = \frac{3}{8} u^4 + C \\ &= \frac{3}{8} (x + \operatorname{sen} x)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 40** Determine $\int x^7 \cos(x^8 + 4) dx$.

Solución

Sea $u = x^8 + 4$, tenemos $du = 8x^7 dx$. Luego

$$\begin{aligned} \int x^7 \cos(x^8 + 4) dx &= \frac{1}{8} \int \cos u du = \frac{1}{8} \operatorname{sen} u + C \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x^8 + 4)}{8} + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 41** Determine $I = \int \frac{x - \ln \sqrt{1 - \sqrt{x}}}{x - \sqrt{x}} dx$

Solución

Separando en forma conveniente la integral I :

$$I = \underbrace{\int \frac{x}{x - \sqrt{x}} dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{\ln \sqrt{1 - \sqrt{x}}}{x - \sqrt{x}} dx}_{I_2}$$

Para I_1 , sea $u^2 = x$, tenemos $dx = 2udu$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x}{x - \sqrt{x}} dx = \int \frac{u^2}{u^2 - u} 2udu = \int \frac{2u^2 - 2 + 2}{u - 1} du \\ &= \int \frac{2(u^2 - 1) + 2}{u - 1} du = \int \frac{2(u + 1)(u - 1) + 2}{u - 1} du \\ &= \int \left(2u + 2 + \frac{2}{u - 1} \right) du \\ &= u^2 + 2u + 2 \ln |u - 1| + C_1 \\ I_1 &= x + 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x} - 1| + C_1 \end{aligned}$$

Para I_2 , sea $t = 1 - \sqrt{x}$, tenemos $dt = -\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{(1/2) \ln(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} dx = \int \frac{\ln(1 - \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})} \frac{dx}{(-2\sqrt{x})} \\ &= \int \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \ln^2 t \\ I_2 &= \frac{1}{2} \ln^2 |1 - \sqrt{x}| + C_2 \end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 \\ &= x + 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x} - 1| - \frac{1}{2} \ln^2 |1 - \sqrt{x}| + C \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 42** Determine $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 2} dx$

Solución

Sea $x = z^{mcm(2,3)} = z^6$, tenemos $dx = 6z^5 dz$. Reemplazando

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 2} dx &= \int \left(\frac{z^3 - 1}{z^2 + 2} \right) (6z^5 dz) \\ &= 6 \int \frac{z^8 - z^5}{z^2 + 2} dz. \end{aligned}$$

Como $\frac{z^8 - z^5}{z^2 + 2}$ es el cociente de dos polinomios y el grado del numerador (8) es mayor al grado del denominador (2) podemos usar la división clásica de polinomios o el método de Horner. Usando cualquiera de esos métodos obtenemos:

$$\frac{z^8 - z^5}{z^2 + 2} = z^6 - 2z^4 - z^3 + 4z^2 + 2z - 8 + \frac{-4z + 16}{z^2 + 2}.$$

Sustituyendo en I :

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{z^8 - z^5}{z^2 + 2} dz = 6 \int \left(z^6 - 2z^4 - z^3 + 4z^2 + 2z - 8 + \frac{-4z + 16}{z^2 + 2} \right) dz \\ &= 6 \left(\frac{z^7}{7} - 2 \frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + 4 \frac{z^3}{3} + z^2 - 8z + \int \frac{-4z + 16}{z^2 + 2} dz \right) \\ &= \frac{6z^7}{7} - \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} + 8z^3 + 6z^2 - 48z - 12 \int \frac{2z}{z^2 + 2} dz + 96 \int \frac{1}{z^2 + (\sqrt{2})^2} dz \\ &= \frac{6z^7}{7} - \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} + 8z^3 + 6z^2 - 48z - 12 \ln |z^2 + 2| + \frac{96}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= \frac{6x^{7/6}}{7} - \frac{12x^{5/6}}{5} - \frac{3x^{2/3}}{2} + 8\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} - 48x^{1/6} - 12 \ln |x^{1/3} + 2| + \\ &\quad \frac{96}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^{1/6}}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 43** Determine $\int \frac{3^{2+\sqrt{x}} - 7}{\sqrt{x}} dx$

Solución

Haciendo $u = \sqrt{x}$, tenemos $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned} \int \frac{3^{2+\sqrt{x}} - 7}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (3^{2+u} - 7) du = 18 \int 3^u du - 14 \int du \\ &= 18 \frac{3^u}{\ln 3} - 14u + C = 18 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\ln 3} - 14\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 44** Determine $\int (3^{\sin^2 x} + 2 \sec x) \sin(2x) dx$.

Solución

Simplificando un poco la integral

$$\begin{aligned}
 I &= \int (3^{\sin^2 x} + 2 \sec x) \sin(2x) dx = \int 3^{\sin^2 x} \sin(2x) dx + 2 \int \sec(x) \sin(2x) dx \\
 &= \int 3^{\sin^2 x} \sin(2x) dx + 2 \int \sec(x) 2 \sin(x) \cos(x) dx \\
 &= \underbrace{\int 3^{\sin^2 x} \sin(2x) dx}_{I_1} + 4 \int \sin(x) dx \\
 &= I_1 - 4 \cos x.
 \end{aligned}$$

Si $u = \sin^2 x$, entonces $du = 2 \sin x \cos x dx = \sin(2x) dx$ y sustituyendo en la integral, queda

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int 3^{\sin^2 x} \sin(2x) dx = \int 3^u du = \frac{3^u}{\ln 3} + C \\
 &= \frac{3^{\sin^2(x)}}{\ln 3} + C
 \end{aligned}$$

Luego

$$I = \frac{3^{\sin^2(x)}}{\ln 3} - 4 \cos x + C.$$

■ **Ejemplo 45** Determine $\int \frac{5x+2}{x^2+8x+52} dx$.

Solución

Como $I = \int \frac{5x+2}{x^2+8x+52} dx = 5 \int \frac{x}{x^2+8x+52} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+8x+52} dx$.

Sea $u = x^2 + 8x + 52$, tenemos $du = (2x+8) dx$. De acuerdo a esto damos forma a la primera integral

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{5}{2} \int \frac{2(x+4-4)}{x^2+8x+52} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+8x+52} dx \\
 &= \frac{5}{2} \int \frac{2(x+4)}{x^2+8x+52} dx - 18 \int \frac{1}{x^2+8x+52} dx. \\
 &= \frac{5}{2} \int \frac{du}{u} - 18 \int \frac{1}{(x+4)^2+36} dx \\
 &= \frac{5}{2} \ln|u| - \frac{18}{6} \arctan\left(\frac{x+4}{6}\right) + C \\
 &= \frac{5}{2} \ln|x^2+8x+52| - 3 \arctan\left(\frac{x+4}{6}\right) + C
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 46** Determine $\int \tan x \ln(\cos x) dx$.

Solución

Sea $u = \ln(\cos x)$, entonces $du = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\tan x dx$. Sustituyendo en la integral

$$\int \tan x \ln(\cos x) dx = - \int u du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\ln^2(\cos x)}{2} + C.$$

■ **Ejemplo 47** Determine $\int \frac{\ln^3 x - 4}{x(\ln x + 1)} dx$.

Solución

Sea $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x} dx$. Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^3 x - 4}{x(\ln x + 1)} dx &= \int \frac{u^3 - 4}{u + 1} du \\ &= \int \frac{u^3 + 1 - 5}{u + 1} du = \int \frac{u^3 + 1}{u + 1} du - 5 \int \frac{1}{u + 1} du \\ &= \int \frac{(u + 1)(u^2 - u + 1)}{u + 1} du - 5 \ln |u + 1| \\ &= \int (u^2 - u + 1) du - 5 \ln |u + 1| \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - 5 \ln |u + 1| + C \\ &= \frac{\ln^3 x}{3} - \frac{\ln^2 x}{2} + \ln x - 5 \ln |\ln x + 1| + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 48** Determine $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[6]{x}} dx$

Solución

Sea $x = t^{\operatorname{mcm}(6;3)} = t^6$, entonces $dx = 6t^5 dt$. Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[6]{x}} dx = \int \frac{t^2}{1 - t} 6t^5 dt \\ &= \int \left[-6t^6 - 6t^5 - 6t^4 - 6t^3 - 6t^2 - 6t - 6 + \frac{6}{1 - t} \right] dt \\ &= -\frac{6t^7}{7} - t^6 - \frac{6t^5}{5} - \frac{3t^4}{2} - 2t^3 - 3t^2 - 6t - 6 \ln |1 - t| + C \\ &= -\frac{6x^{7/6}}{7} - x - \frac{6x^{5/6}}{5} - \frac{3x^{2/3}}{2} - 2x^{1/2} - 3x^{1/3} - 6x^{1/6} - 6 \ln |1 - x^{1/6}| + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 49** Determine $\int \frac{x^4(x+2) + (3x^2+2)\sqrt{8-x^5}}{(x+2)\sqrt{8-x^5}} dx$.

Solución

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^4(x+2) + (3x^2+2)\sqrt{8-x^5}}{(x+2)\sqrt{8-x^5}} dx \\
 &= \int \frac{x^4(x+2)}{(x+2)\sqrt{8-x^5}} dx + \int \frac{(3x^2+2)\sqrt{8-x^5}}{(x+2)\sqrt{8-x^5}} dx \\
 &= \int \frac{x^4}{\sqrt{8-x^5}} dx + \int \frac{(3x^2+2)}{x+2} dx \\
 &= -\frac{1}{5} \int (8-x^5)^{-1/2} (-5x^4) dx + \int \left[3x - 6 + \frac{14}{x+2} \right] dx.
 \end{aligned}$$

En la primera integral, sea $u^2 = 8 - x^5$, tenemos $2udu = -5x^4 dx$, sustituyendo e integrando

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{2}{5}u + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 14 \ln|x+2| + C \\
 &= -\frac{2}{5}(8-x^5)^{1/2} + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 14 \ln|x+2| + C.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 50** Determine $\int \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{x^2+4} dx$.

Solución

Sea $z = \arctan(\frac{x}{2})$, tenemos $\tan z = \frac{x}{2} \Rightarrow 2 \sec^2 z dz = dx$.
Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{x^2+4} dx &= \int \frac{z(2 \sec^2 z dz)}{(2 \tan z)^2 + 4} dz = \frac{1}{2} \int \frac{z \sec^2 z}{\tan^2 z + 1} dz \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{z \sec^2 z}{\sec^2 z} dz = \frac{1}{2} \int z dz = \frac{1}{4} z^2 + C \\
 &= \frac{1}{4} \arctan^2\left(\frac{x}{2}\right) + C.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 51** Determine $\int \left(\frac{x-2}{\sqrt[5]{x+2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}} \right) dx$.

Solución

$$\int \left(\frac{x-2}{\sqrt[5]{x+2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}} \right) dx = \underbrace{\int \frac{x-2}{\sqrt[5]{x+2}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx}_{I_2}.$$

Para I_1 , Sea $w = x + 2$, tenemos $dw = dx$. Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x-2}{\sqrt[5]{x+2}} dx = \int \frac{w-4}{w^{1/5}} dw = \int w^{4/5} dw - 4 \int w^{-1/5} dw \\ &= \frac{5}{9} w^{9/5} - 5 w^{4/5} + C_1 \\ &= \frac{5}{9} (x+2)^{9/5} - 5 (x+2)^{4/5} + C_1. \end{aligned}$$

Para I_2 , Sea $t = x^3 + 2$, tenemos $dt = 3x^2 dx$. Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx = \int \frac{dt}{t^{1/2}} = 2t^{1/2} + C_2 \\ &= 2\sqrt{x^3+2} + C_2. \end{aligned}$$

Luego

$$\int \left(\frac{x-2}{\sqrt[5]{x+2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{5}{9} (x+2)^{9/5} - 5 (x+2)^{4/5} + 2\sqrt{x^3+2} + C.$$

■

■ **Ejemplo 52** Determine $\int \frac{dx}{e^{\ln 2x} \sqrt{\ln x - x}}$

Solución

La integral es equivalente a : $\int \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x - x}} = \int \frac{dx}{x(2\sqrt{\ln x - 1})}$.

Sea $u^2 = \ln x$, tenemos $2udu = \frac{dx}{x}$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(2\sqrt{\ln x - 1})} &= \int \frac{2udu}{2u-1} = \int \left(1 + \frac{1}{2u-1} \right) du \\ &= u + \frac{1}{2} \ln |2u-1| + C = \sqrt{\ln x} + \frac{1}{2} \ln |2\sqrt{\ln x} - 1| + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 53** Determine $\int \frac{2(x+1)}{2x\left(1+\frac{x}{2}\right)\sqrt{2x+x^2}} dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x+2)}{2x\left(1+\frac{x}{2}\right)\sqrt{2x+x^2}} dx &= \int \frac{2(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{(x+1)^2-1}} dx \\ &= \int \frac{2(x+1)}{[(x+1)^2-1]\sqrt{(x+1)^2-1}} dx \end{aligned}$$

Haciendo $u = (x+1)^2 - 1$, tenemos $du = 2(x+1)dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x+1)}{[(x+1)^2-1]\sqrt{(x+1)^2-1}} dx &= \int \frac{du}{u\sqrt{u}} = \int u^{-3/2} du = -2\frac{1}{\sqrt{u}} + C \\ &= -2\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 54** Determine $\int \frac{\tan(3x) + \ln^2(\cos(3x))\tan(3x)}{\ln(\cos(3x))} dx$

Solución

$$\frac{\tan(3x) + \ln^2(\cos(3x))\tan(3x)}{\ln(\cos(3x))} = \frac{\tan 3x}{\ln(\cos(3x))} + \ln(\cos(3x))\tan(3x)$$

$$\text{Resolviendo } I_1 = \int \frac{\tan 3x}{\ln(\cos(3x))} dx$$

Sea $z = \ln(\cos(3x))$, tenemos $dz = -3\tan(3x) dx$

$$I_1 = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{3} \ln|\ln(\cos(3x))| + C_1.$$

$$\text{Resolviendo } I_2 = \int \ln(\cos(3x))\tan(3x) dx,$$

Sea $u = \cos(3x)$, tenemos $du = -3\sin(3x) dx$.

$$I_2 = -\frac{1}{3} \int \frac{\ln u}{u} du = -\frac{1}{3} \frac{\ln^2|\cos(3x)|}{2} + C_2.$$

Luego, $I = I_1 + I_2$

$$I = -\frac{1}{3} \ln|\ln(\cos(3x))| - \frac{1}{6} \ln^2|\cos(3x)| + C.$$

■ **Ejemplo 55** Determine $\int \frac{\sin(\cos x) e^{\tan^2(\cos x)} \sin x}{\cos^3(\cos x)} dx$

Solución

Sea $u = \tan^2(\cos x)$, tenemos $du = 2 \tan(\cos x) \sec^2(\cos x) (-\sin x) dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(\cos x) e^{\tan^2(\cos x)} \sin x}{\cos^3(\cos x)} dx &= \int \frac{\sin(\cos x) e^{\tan^2(\cos x)} \sin x}{\cos(\cos x) \cos^2(\cos x)} dx \\ &= \int \tan(\cos x) e^{\tan^2(\cos x)} \sec^2(\cos x) \sin x dx \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C. \\ &= -\frac{1}{2} e^{\tan^2(\cos x)} + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 56** Determine $\int (1 + \cos(ax))^{100} \sin(ax) dx$, donde $a \in \mathbb{R}^*$.

Solución

Sea $u = 1 + \cos(ax)$, tenemos $du = -a \sin(ax) dx$. Luego

$$\int u^{100} \left(-\frac{1}{a}\right) du = -\frac{1}{a} \frac{u^{101}}{101} + C = -\frac{1}{101a} (1 + \cos(ax))^{101} + C.$$

■ **Ejemplo 57** Determine $\int \frac{2x}{\sqrt{2+x^2} + \sqrt{(2+x^2)^3}} dx$

Solución

$$I = \int \frac{2x}{\sqrt{2+x^2} + \sqrt{(2+x^2)^3}} dx = 2 \int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2} \sqrt{1+\sqrt{2+x^2}}}$$

Sea $u = 1 + \sqrt{2+x^2}$, tenemos $du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$. Sustituyendo

$$I = 2 \int \frac{du}{u^{1/2}} = 4\sqrt{u} + C = 4\sqrt{1 + \sqrt{2+x^2}} + C.$$

■ **Ejemplo 58** Determine $\int (\ln x + 1) e^{x \ln x} dx$.

Solución

Sea $u = x \ln x$, tenemos $du = (\ln x + 1) dx$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} I &= \int (\ln x + 1) e^{x \ln x} dx = \int e^u du = e^u + C \\ &= e^{x \ln x} + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 59** Determine $\int \left(\frac{(x+2)\sqrt{x+2\ln x}}{x(x+2\ln x)^2} \right) dx$.

Solución

$$\text{Como } I = \int \left(\frac{(x+2)\sqrt{x+2\ln x}}{x(x+2\ln x)^2} \right) dx = \int \frac{(x+2)}{x} (x+2\ln x)^{-3/2} dx,$$

Sea $u^2 = x + 2\ln x$, tenemos $2u du = \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \left(\frac{x+2}{x}\right) dx$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+2)}{x} (x+2\ln x)^{-3/2} dx = \int 2u u^{-3} du \\ &= 2 \int u^{-2} du = -2u^{-1} + C \\ &= -2(x+2\ln x)^{-1/2} + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 60** Determine $\int \frac{x+x^{2/3}+x^{1/6}}{x(1+x^{1/3})} dx$.

Solución

Sea $u^6 = x$, tenemos $6u^5 du = dx$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{x+x^{2/3}+x^{1/6}}{x(1+x^{1/3})} dx &= \int \left(\frac{u^6+u^4+u}{u^6(1+u^2)} \right) 6u^5 du \\ &= 6 \int \left(\frac{u^6+u^4}{u^6(1+u^2)} + \frac{1}{u^5(1+u^2)} \right) u^5 du \\ &= 6 \int \left(\frac{u^5+u^3}{(1+u^2)} + \frac{1}{(1+u^2)} \right) dx \\ &= 6 \int \left(u^3 + \frac{1}{1+u^2} \right) dx \\ &= 6 \left(\frac{u^4}{4} + \arctan u \right) + C \\ &= 6 \left(\frac{x^{2/3}}{4} + \arctan x^{1/6} \right) + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 61** Determine $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x} \right) dx \\ &= \int x (\sqrt{1+x^2}-x) dx \\ &= \int x\sqrt{1+x^2} dx - \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} - \frac{x^3}{3} + C.\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 62** Determine $\int \frac{\sec^2 \sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^6}} dx$.

Solución

Sea $u^7 = x$, tenemos $7u^6 du = dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2 \sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^6}} dx &= \int \frac{7u^6 \sec^2 u}{u^6} du = 7 \int \sec^2 u du \\ &= 7 \tan u + C = 7 \tan(\sqrt[7]{x}) + C.\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 63** Determine $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución

Sea $u^2 = e^{2x} - 1$, tenemos $2u du = 2e^{2x} dx = 2(u^2 + 1) dx$, expresamos el diferencial en términos de la nueva variable $dx = \frac{u}{u^2+1} du$. Luego sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{1}{u} \frac{u}{u^2+1} du = \int \frac{1}{u^2+1} du = \arctan u + C \\ &= \arctan \sqrt{e^{2x}-1} + C\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 64** Determine $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx$.

Solución

Usando la identidad $\sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sen^2 x \cos^4 x} dx &= \int \frac{(\sen^2 x + \cos^2 x)^2}{\sen^2 x \cos^4 x} dx \\
 &= \int \frac{\cos^4 x + 2 \cos^2 x \sen^2 x + \sen^4 x}{\sen^2 x \cos^4 x} dx \\
 &= \int \frac{1}{\sen^2 x} dx + \int \frac{2}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sen^2 x}{\cos^4 x} dx \\
 &= \int \csc^2 x dx + 2 \int \sec^2 x dx + \int \tan^2 x \sec^2 x dx \\
 &= -\cot x + 2 \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C.
 \end{aligned}$$

■

Para $m \neq 0$ y $n \neq -1$, se obtienen las siguientes integrales.

$$\int \sen^n(mx) \cos(mx) dx = \frac{\sen^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C$$

$$\int \cos^n(mx) \sen(mx) dx = -\frac{\cos^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C$$

$$\int \tan^n(mx) \sec^2(mx) dx = \frac{\tan^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C$$

$$\int \cot^n(mx) \csc^2(mx) dx = -\frac{\cot^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C$$

$$\int \sec^n(mx) \tan(mx) \sec(mx) dx = \frac{\sec^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C$$

$$\int \csc^n(mx) \cot(mx) \csc(mx) dx = -\frac{\csc^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C$$

■ **Ejemplo 65** Verifique $\int \sen^n(mx) \cos(mx) dx = \frac{\sen^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C$, donde $m \neq 0$ y $n \neq -1$

Prueba

Sea $u = \operatorname{sen}(mx)$, tenemos $du = m \cos(mx) dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n(mx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{m} \int u^n du = \frac{1}{m} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{n+1}(mx)}{(n+1)m} + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 66** Determine $\int \sqrt{x^2+1} \cot^2 \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) \right) dx$

Solución

Sea

$$\begin{aligned} u &= x\sqrt{x^2+1} + \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) \\ du &= \left[\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \right] dx \\ &= \left[\frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(\sqrt{x^2+1}+x)\sqrt{x^2+1}} \right] dx \\ &= \left[\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \right] dx \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2+1} \cot^2 \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cot^2 u du = \frac{1}{2} \int (\csc^2 u - 1) du = -\frac{1}{2} \cot u + \frac{1}{2} u + C \\ &= -\frac{1}{2} \cot \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) \right) + \frac{x\sqrt{x^2+1} + \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right)}{2} + C \end{aligned}$$

2.3 Ejercicios propuestos

1. $\int 2^{x-2} \sqrt{5+2^x} dx$
2. $\int \frac{\cos(\ln 4x^2)}{12^x} dx$
3. $\int \frac{12^x}{\sqrt{2+e^x}} dx$
4. $\int \frac{1+x}{x+2} dx$

$$5. \int \frac{x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$6. \int \frac{1}{\cos^2 x \ln(\tan x)} dx$$

$$7. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

8. Halle la antiderivada de la función g definida por $g(x) = x^2 \left(x e^{4x^4} + \frac{1}{x^2 + 1} \right)$, cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

$$9. \text{ Halle la antiderivada general de } f(x) = \frac{5x + x \ln(1 + x^2)}{1 + x^2}$$

10. Si $G(x) = 4x + e^{5x^2+1} + \sqrt{x} + c$ es la antiderivada general de $g(x)$ entonces, halle $g(x)$.

$$11. \text{ Halle la antiderivada general de } f(x) = \frac{2(1 + \tan 2x)^{70}}{\cos^2 2x}.$$

$$12. \text{ Halle la antiderivada general de } f(x) = \sin(2x) \left(2^{2+\cos^2 x} + 5 \right)$$

$$13. \int \frac{x^3}{\sqrt{2x^2+7}} dx$$

$$\text{Rpta. } \frac{\sqrt{2x^2+7}^3}{12} - 7\sqrt{2x^2+7} + C$$

$$14. \int \frac{x^7}{(4-x^2)^{7/2}} dx$$

$$\text{Rpta. } \frac{x^5}{20(4-x^2)^{5/2}} + C$$

$$15. \int \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}} dx$$

$$\text{Rpta. } \frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}} + C$$

$$16. \int x^2 \sqrt{16-x} dx$$

$$\text{Rpta. } -\frac{32(\sqrt{16-x})^3}{3} + \frac{2(\sqrt{16-x})^5}{5} + C$$

$$17. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$$

$$\text{Rpta. } -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$$

$$18. \int \frac{1}{6x+1} dx$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{6} \ln |6x+1| + C$$

$$19. \int \frac{x \arctan(x^2)}{(1+x^4)(2+\arctan(x^2))} dx$$

$$20. \int \frac{\arctan^3 x}{(x^2+1)e^2} dx$$

$$21. \int \frac{x^2 [1 + \cos(x^3+1)]}{\sin^2(x^3+1)} dx$$

$$22. \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

$$\text{Rpta. } 2\sqrt{\ln x} + C$$

$$23. \int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{2} \ln^2(x+1) + C$$

$$24. \int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$$

$$\text{Rpta. } \ln |1 + \ln x| + C$$

25. $\int \frac{\sin(3x)}{\cos(3x) - 1} dx$ Rpta. $-\frac{1}{3} \ln |\cos(3x) - 1| + C$
26. $\int (\tan 2x - \sec 2x) dx$ Rpta. $-\frac{1}{2} \ln |1 - \sin 2x| + C$
27. $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx$ Rpta. $\frac{1}{2} \tan x^2 + C$
28. $\int x \sin(1 - x^2) dx$ Rpta. $\frac{1}{2} \cos(1 - x^2) + C$
29. $\int \left(\frac{1}{\sin(\sqrt{2x})} - 1 \right) dx$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{\sqrt{2x}}{2} \right) \right| - x + C$
30. $\int \cot \left(\frac{x}{a-b} \right) dx$ Rpta. $(a-b) \ln \left| \sin \left(\frac{x}{a-b} \right) \right| + C$
31. $\int \frac{1}{\tan \left(\frac{x}{5} \right)} dx$ Rpta. $5 \ln \left| \sin \frac{x}{5} \right| + C$
32. $\int (x \cot(x^2 + 1)) dx$ Rpta. $\frac{1}{2} \ln |\sin(x^2 + 1)| + C$
33. $\int \left(\cos \left(\frac{x}{a} \right) \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) dx$ Rpta. $\frac{a}{4} \cos \left(\frac{2x}{a} \right) + C$
34. $\int \sin^3(6x) \cos(6x) dx$ Rpta. $\frac{\sin^4(6x)}{24} + C$
35. $\int \frac{\cos(ax)}{\sin^5(ax)} dx$ Rpta. $-\frac{1}{4a \sin^4(ax)}$
36. $\int \frac{\sin(3x)}{3 + \cos(3x)} dx$ Rpta. $-\frac{1}{3} \ln |3 + \cos(3x)| + C$
37. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx$ Rpta. $-\frac{\sqrt{\cos 2x}}{2} + C$
38. $\int \sin(2x) \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} dx$ Rpta. $-\frac{\sqrt{(5+3 \cos 2x)^3}}{9\sqrt{2}} + C$
39. $\int \frac{3 - \sqrt{2 + 3x^2}}{2 + 3x^2} dx$
 Rpta. $\sqrt{\frac{3}{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{\frac{1}{3}} \ln |\sqrt{3x} + \sqrt{3x^2 + 2}| + C$
40. $\int \frac{x^3 - 1}{x + 1} dx$ Rpta. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 2 \ln |x + 1| + C$
41. $\int x \sqrt[5]{5 - x^2} dx$ Rpta. $-\frac{5 \sqrt[5]{(5 - x^2)^6}}{12} + C$
42. $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x + 1} dx$ Rpta. $\frac{1}{4} \ln |x^4 - 4x + 1| + C$
43. $\int \frac{x^3}{x^8 + 5} dx$ Rpta. $\frac{1}{4\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{x^4}{5} \right) + C$
44. $\int x e^{-x^2} dx$ Rpta. $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$
45. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$ Rpta. $-2e^{-x/2} + C$

46. $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$ Rpta. $\ln|x + \cos x| + C$
47. $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ Rpta. $-\frac{1}{\ln x} + C$
48. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 2}} dx$ Rpta. $2 \ln |\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 2}| + C$
49. $\int \left(2 + \frac{x}{2x^2 + 1}\right) \left(\frac{1}{2x^2 + 1}\right) dx$
Rpta. $-\frac{1}{4(2x^2 + 1)} + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x) + C$
50. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx$ Rpta. $\frac{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}}{2} + C$
51. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ Rpta. $\frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$
52. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx$ Rpta. $\frac{3 \sqrt[3]{(1 + \ln x)^4}}{4} + C$
53. $\int \frac{x}{\sqrt{x} - 2} dx$ Rpta. $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2x + 8\sqrt{x} + 16(\sqrt{x} - 2) + C$
54. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ Rpta. $\frac{1}{3}(-\cos x \sin^2 x - 2 \cos x) + C$
55. $\int \frac{5e^{2x}}{\sqrt[3]{1 + e^{2x}}} dx$ Rpta. $\frac{15}{2} \frac{(\sqrt[3]{e^{2x} + 1})^2}{2} + C$
56. $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $2(\sqrt{x} + \frac{1}{2}) + C$
57. $\int \frac{1}{2x^2 - 8x + 26} dx$ Rpta. $\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$
58. $\int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}} dx$ Rpta. $\frac{2}{3} \frac{a^x \sqrt{a^x}}{\ln a} + \frac{2}{\sqrt{a^x} \ln a} + C$
59. $\int x e^{-(x^2 + 1)} dx$ Rpta. $-\frac{1}{2e^{x^2 + 1}} + C$
60. $\int x 7^{x^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{2} \frac{7^{x^2}}{\ln 7} + C$
61. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ Rpta. $-e^{1/x} + C$
62. $\int \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $\frac{2e^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C$
63. $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$ Rpta. $\ln|e^x - 1| + C$
64. $\int e^x \sqrt{a - be^x} dx$ Rpta. $-\frac{2\sqrt{(a - be^x)^3}}{3b} + C$
65. $\int (e^{x/3} + 1)^{1/3} e^{x/3} dx$ Rpta. $3a \frac{\sqrt[3]{(e^{x/a} + 1)^4}}{4} + C$

66. $\int \frac{1}{2^x + 3} dx$ Rpta. $\frac{\pi}{3} - \frac{\ln|2^x + 3|}{3 \ln 2} + C$
67. $\int \frac{a^x}{1 + a^x} dx$ Rpta. $\frac{1}{\ln a} \arctan(a^x) + C$
68. $\int \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-2bx}} dx$ Rpta. $-\frac{1}{2b} \ln \left| \frac{1 + e^{-2bx}}{1 - e^{-2bx}} \right| + C$
69. $\int \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dx$ Rpta. $\arctan(e^t) + C$
70. $\int \sin(a + bx) dx$ Rpta. $-\frac{1}{b} \cos(a + bx) + C$
71. $\int \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$ Rpta. $\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$
72. $\int (\cos(ax) + \sin(ax))^2 dx$ Rpta. $x + \frac{\sin^2 ax}{a} + C$
73. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $2 \sin \sqrt{x} + C$
74. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ Rpta. $-\cos(\ln x) + C$
75. $\int \sin^2 x dx$ Rpta. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$
76. $\int \cos^2 x dx$ Rpta. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$
77. $\int \sec^2(ax + b) dx$ Rpta. $\frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
78. $\int \frac{1}{\sqrt{7 - 5x^2}} dx$ Rpta. $\sqrt{\frac{1}{5}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}\right) + C$
79. $\int \frac{3 - 2x}{5x + 7} dx$ Rpta. $\frac{29}{25} \ln|5x + 7| + C$
80. $\int \frac{x}{2x^2 + 3} dx$ Rpta. $\frac{1}{4} \ln|2x^2 + 3| + C$
81. $\int \frac{ax + b}{b^2 + a^2 x^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{2a} \ln|a^2 x^2 + b^2| + \frac{b}{a^2} \arctan \frac{ax}{b} + C$
82. $\int \frac{x}{\sqrt{a^4 - x^4}} dx$ Rpta. $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + C$
83. $\int \frac{x^2}{1 + x^6} dx$ Rpta. $\frac{1}{3} \arctan x^3 + C$
84. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}} dx$ Rpta. $\frac{1}{3} \ln|x^3 + \sqrt{x^6 - 1}| + C$
85. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{1 - x^2} dx$ Rpta. $\frac{2(\sqrt{\arcsin x})^3}{3} + C$
86. $\int \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{4 + x^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{8} \ln|1 + 4x^2| - \frac{\arctan(2x)\sqrt{\arctan(2x)}}{3} + C$
87. $\int \frac{x - \sqrt{\arctan(2x)}}{1 + 4x^2} dx$

88. $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} dx$ Rpta. $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} + C$
89. $\int ae^{-mx} dx$ Rpta. $-\frac{ae^{-mx}}{m} + C$
90. $\int 4^{2-3x} dx$ Rpta. $-\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C$
91. $\int (e^t - e^{-t}) dt$ Rpta. $e^t - e^{-t} + C$
92. $\int (e^{x/a} + e^{-x/a}) dx$ Rpta. $ae^{x/a} - ae^{-x/a} + C$
93. $\int \frac{x}{a-x} dx$ Rpta. $-a \ln|a-x| + (a-x) + C$
94. $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$ Rpta. $x + \ln|2x+1| + C$
95. $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx$ Rpta. $-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln|3+2x| + C$
96. $\int \frac{x}{a+bx} dx$ Rpta. $\frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln|a+bx| + C$
97. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x+1| + C$
98. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+3| + C$
99. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx$ Rpta. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3 \ln|x-1| + C$
100. $\int \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2 dx$ Rpta. $a^2x + 2ab \ln|x-a| - \frac{b^2}{x-a} + C$
101. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$ Rpta. $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$
102. $\int \frac{b}{\sqrt{1-y}} dy$ Rpta. $-2b\sqrt{1-y} + C$
103. $\int \sqrt{a-bx} dx$ Rpta. $-\frac{2(a-bx)\sqrt{a-bx}}{3b} + C$
104. $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$ Rpta. $2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$
105. $\int \frac{x^2}{2+x^2} dx$ Rpta. $-x - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$
106. $\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx$ Rpta. $-\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln|x^2-a^2| + C$
107. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx$ Rpta. $x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{5}{2} \ln(x^2+4) + C$

3. Integración por partes

En el capítulo anterior se introdujo el método de cambio de variable o sustitución, una de las técnicas más importantes de integración, en este capítulo se desarrollará el método de integración por partes, teóricamente se puede resolver cualquier integral mediante el empleo de este método, aunque en la práctica se aplica cuando el integrando es un producto de funciones.

3.1 Método

La fórmula de integración por partes se deduce del diferencial de un producto: si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son diferenciables, $d(uv) = u dv + v du$ y $u dv = d(uv) - v du$, integrando obtenemos la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Al desarrollar ejercicios es conveniente utilizar el patrón:

$$\begin{array}{ll} u = \square & dv = \square \\ du = \square & v = \square \end{array}$$

Una parte de la integral se llama u y el resto (debe incluir el diferencial) se llama dv ; para poder aplicar la fórmula se debe diferenciar la parte que se llamó u e integrar la parte que se llamó dv ; esta última debe ser una integral más fácil de calcular.

Si bien es cierto este método es general, se recomienda usarlo en los siguientes casos:

- En integrales que contienen funciones trigonométricas inversas
- En integrales que contienen funciones logarítmicas en cualquier base.

- En integrales que contienen potencias impares de secante y de cosecante.
- En integrales que contienen el producto de dos o más funciones que pueden ser de la forma: Inversa, Logarítmica, Algebraica, Trigonométrica y/o exponencial (ILATE), la función que aparezca primero en el orden dado en la lista anterior se puede considerar como u ; la palabra ILATE no es general pero al lector que recién empieza a conocer el método, le será de gran ayuda pues le permitirá una adecuada elección de u .

■ **Ejemplo 67** Determine $\int x \cos x \, dx$

Solución

En el integrando x es Algebraica y $\cos x$ es Trigonométrica, usando la palabra ILATE, consideramos $u = x$

Sea

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x \, dx \\ du = dx & v = \text{sen } x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \underbrace{x}_u \underbrace{\text{sen } x}_v - \int \underbrace{\text{sen } x}_v \underbrace{dx}_{du} \\ &= x \text{sen } x + \cos x + C \end{aligned}$$

■

3.2 Ejercicios resueltos

■ **Ejemplo 68** Determine $\int \arctan x \, dx$

Solución

En el integrando 1 es Algebraica y $\arctan x$ es Inversa, usando la palabra ILATE, consideramos $u = \arctan x$

Sea

$$\begin{array}{ll} u = \arctan x & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x^2} \, dx & v = x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\arctan x}_u \underbrace{dx}_{dv} &= \underbrace{\arctan x}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{x}_v \underbrace{\frac{1}{1+x^2} \, dx}_{du} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 69** Determine $\int e^{2x} \sin(3x) dx$

Solución

Sea

$$\begin{aligned} u &= \sin(3x) & dv &= e^{2x} dx \\ du &= 3 \cos(3x) dx & v &= \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{\sin(3x)}_u \underbrace{e^{2x} dx}_{dv} = \underbrace{\sin(3x)}_u \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_v - \int \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_v \underbrace{3 \cos(3x) dx}_{du} \\ &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{2} \underbrace{\int \cos(3x) e^{2x} dx}_{I_1} \end{aligned}$$

A la nueva integral I_1 también le aplicaremos integración por partes:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(3x) & dv_1 &= e^{2x} dx \\ du_1 &= -3 \sin(3x) dx & v_1 &= \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \cos(3x) e^{2x} dx = \cos(3x) \frac{e^{2x}}{2} + \frac{3}{2} \underbrace{\int e^{2x} \sin(3x) dx}_I$$

Reemplazando I_1 en I

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{2} \left(\cos(3x) \frac{e^{2x}}{2} + \frac{3}{2} I \right) \\ \left(1 + \frac{9}{4} \right) I &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{4} \cos(3x) e^{2x} \\ I &= \frac{2}{13} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{13} \cos(3x) e^{2x} + C \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 70** A veces haciendo un cambio de variable podemos evitar usar integración por partes. Veamos

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

Solución 1: Sea $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x} dx &= \int u du = \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{\ln^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

Solución 2: Usando integración por partes

Sea

$$\begin{aligned}u &= \ln x & dv &= \frac{dx}{x}, \quad x > 0 \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \ln x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x} dx &= \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx \\ 2 \int \frac{\ln x}{x} dx &= \ln^2 x + C_1 \\ \int \frac{\ln x}{x} dx &= \frac{\ln^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 71** Determine $\int \sec^3 x dx$

Solución

Reescribiremos $\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx$

$$\begin{aligned}u &= \sec x & dv &= \sec^2 x dx \\ du &= \sec x \tan x dx & v &= \tan x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \int \sec x \sec^2 x dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ 2 \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C \\ \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 72** Un error común en la elección de u es no tomar en cuenta su posición en el integrando. Veamos la elección de u en el siguiente ejemplo

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Elección incorrecta: Ver posición de $\ln x$ en el integrando

$$u = \ln x \quad dv = \frac{1}{x} dx$$

■ **Ejemplo 73** Determine $\int x^3 \left(\sqrt[5]{9+x^2} \right)^3 dx$.

Solución

Como la integral $\int x^3 \left(\sqrt[5]{9+x^2} \right)^3 dx = \int x^2 (9+x^2)^{3/5} x dx$, entonces procedemos a usar el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= (9+x^2)^{3/5} x dx \\ du &= 2x dx & v &= \frac{5}{16} (9+x^2)^{8/5} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int x^2 (9+x^2)^{3/5} x dx &= x^2 \frac{5}{16} (9+x^2)^{8/5} - \int \frac{5}{16} (9+x^2)^{8/5} (2x dx) \\ &= \frac{5}{16} \left[x^2 (9+x^2)^{8/5} - 2 \int (9+x^2)^{8/5} x dx \right] \\ &= \frac{5}{16} \left[x^2 (9+x^2)^{8/5} - \frac{5}{13} (9+x^2)^{13/5} \right] + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 74** Determine $\int e^{3x} \cos(3x) dx$

Solución

Sea

$$\begin{aligned} u &= e^{3x} & dv &= \cos(3x) dx \\ du &= 3e^{3x} dx & v &= \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int e^{3x} \cos(3x) dx = \frac{e^{3x}}{3} \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3} \int 3e^{3x} \operatorname{sen}(3x) dx \\ &= \frac{e^{3x}}{3} \operatorname{sen}(3x) - \underbrace{\int e^{3x} \operatorname{sen}(3x) dx}_{I_1} \end{aligned}$$

Integramos por partes I_1 , se tiene :

$$\begin{aligned} u &= e^{3x} & dv &= \operatorname{sen}(3x)dx \\ du &= 3e^{3x}dx & v &= -\frac{1}{3}\cos(3x). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{3x}}{3} \operatorname{sen}(3x) - \int e^{3x} \operatorname{sen}(3x) dx \\ &= \frac{e^{3x}}{3} \operatorname{sen}(3x) - \left(-\frac{e^{3x}}{3} \cos(3x) + \underbrace{\int e^{3x} \cos(3x) dx}_I \right) \\ I &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{3x}}{3} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{3} e^{3x} \cos(3x) \right] + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 75** Determine $\int 5^{-x} \operatorname{sen}(1-x) \cos(1-x) dx$

Solución

La integral $\int 5^{-x} \operatorname{sen}(1-x) \cos(1-x) dx = \frac{1}{2} \int 5^{-x} \operatorname{sen}[2(1-x)] dx$, podemos usar integración por partes. Sea

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}[2(1-x)] & dv &= 5^{-x} dx \\ du &= -2 \cos[2(1-x)] dx & v &= -\frac{5^{-x}}{\ln 5}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int 5^{-x} \operatorname{sen}(1-x) \cos(1-x) dx = \frac{1}{2} \int 5^{-x} \operatorname{sen}[2(1-x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}[2(1-x)] \left(-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \right) - \int \left(-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \right) (-2 \cos[2(1-x)] dx) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} \underbrace{\int 5^{-x} \cos[2(1-x)] dx}_{I_1} \right]. \end{aligned}$$

En la integral I_1 también podemos aplicar integración por partes.

$$\begin{aligned} u &= \cos[2(1-x)] & dv &= 5^{-x} dx \\ du &= 2 \operatorname{sen}[2(1-x)] dx & v &= -\frac{5^{-x}}{\ln 5}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{5^{-x}}{\ln 5} \cos[2(1-x)] - \int -\frac{5^{-x}}{\ln 5} 2 \operatorname{sen}[2(1-x)] dx \\ &= -\frac{5^{-x}}{\ln 5} \cos[2(1-x)] + \frac{2}{\ln 5} \int 5^{-x} \operatorname{sen}[2(1-x)] dx. \end{aligned}$$

Reemplazando en I

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} I_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} \left(-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \cos[2(1-x)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{2}{\ln 5} \int 5^{-x} \operatorname{sen}[2(1-x)] dx \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} \left(-\frac{5^{-x}}{\ln 5} \cos[2(1-x)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{2}{\ln 5} (2I) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{5^{-x}}{\ln 5} \left[\operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} \cos[2(1-x)] \right] - \left(\frac{2}{\ln 5} \right)^2 I. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I + \left(\frac{2}{\ln 5} \right)^2 I &= -\frac{1}{2} \frac{5^{-x}}{\ln 5} \left[\operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} \cos[2(1-x)] \right] \\ \left[1 + \left(\frac{2}{\ln 5} \right)^2 \right] I &= -\frac{1}{2} \frac{5^{-x}}{\ln 5} \left[\operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} \cos[2(1-x)] \right] \\ I &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2}{\ln 5} \right)^2 \right]} \frac{5^{-x}}{\ln 5} \left[\operatorname{sen}[2(1-x)] - \frac{2}{\ln 5} \cos[2(1-x)] \right] + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 76** Determine $\int x \arccos\left(\frac{1}{x}\right) dx$

Solución

Recordemos que $\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \in (-1, 1)$.

$$u = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} d\left(\frac{1}{x}\right) \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

$$du = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

$$du = \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$$

Así tenemos :

$$I = \frac{x^2}{2} \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

Si $x \in (1, +\infty)$ entonces

$$I = \frac{x^2}{2} \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{x^2}{2} \arccos x - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C$$

y para $x \in (-\infty, -1)$

$$I = \frac{x^2}{2} \arccos x + \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{x^2}{2} \arccos x + \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C$$

■ **Ejemplo 77** Determine $\int \frac{e^{2x}(1+2x \ln x)}{4x} dx$

Solución

La integral se puede expresar como

$$I = \int \frac{e^{2x}(1+2x \ln x)}{4x} dx = \int \frac{e^{2x}}{4x} dx + \underbrace{\int \frac{e^{2x}}{2} \ln x dx}_{I_1}$$

Integrando por partes I_1 , tenemos.

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= \frac{e^{2x}}{2} dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{1}{4} e^{2x} \end{aligned}$$

Así

$$I = \int \frac{e^{2x}}{4x} dx + \frac{e^{2x}}{4} \ln x - \int e^{2x} \frac{1}{4x} dx = \frac{e^{2x}}{4} \ln x + C.$$

■

■ **Ejemplo 78** Determine $\int \sin^2(\ln x) dx$.

Solución

Sea $z = \ln x$, entonces $x = e^z$ y $dx = e^z dz$. Así

$$\begin{aligned} \int \sin^2(\ln x) dx &= \int e^z \sin^2(z) dz = \int e^z \frac{1}{2} (1 - \cos(2z)) dz \\ &= \frac{1}{2} e^z - \frac{1}{2} \underbrace{\int e^z \cos(2z) dz}_I. \end{aligned}$$

Integrando I por partes. Sea

$$\begin{aligned} u &= \cos(2z) & dv &= e^z dz \\ du &= -2 \sin(2z) dz & v &= e^z \end{aligned}$$

Luego

$$I = \int e^z \cos(2z) dz = e^z \cos(2z) + \underbrace{2 \int e^z \sin(2z) dz}_{I_1}.$$

Integrando por partes I_1 . Sea

$$\begin{aligned} u &= \sin(2z) & dv &= e^z dz \\ du &= 2 \cos(2z) dz & v &= e^z \end{aligned}$$

Luego

$$I_1 = \int e^z \sin(2z) dz = e^z \sin(2z) - 2 \int e^z \cos(2z) dz = e^z \sin(2z) - 2I.$$

Sustituyendo

$$I = e^z \cos(2z) + 2I_1 = e^z \cos(2z) + 2(e^z \sin(2z) - 2I)$$

entonces

$$I = \frac{1}{5} (e^z \cos(2z) + 2e^z \sin(2z)) + C.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \sin^2(\ln x) dx &= \frac{1}{2} e^z - \frac{1}{2} I \\ &= \frac{1}{2} e^z - \frac{1}{10} (e^z \cos(2z) + 2e^z \sin(2z)) + C \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{10} (x \cos(2 \ln x) + 2x \sin(2 \ln x)) + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 79** Determine $\int (\sqrt{x})^3 \arccos \sqrt{x} \, dx$.

Solución

Integrando por partes.

$$\begin{aligned} u &= \arccos \sqrt{x} & dv &= x^{3/2} dx \\ du &= \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} & v &= \frac{2}{5} x^{5/2}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x})^3 \arccos \sqrt{x} \, dx &= \frac{2}{5} x^{5/2} \arccos(\sqrt{x}) - \int \frac{2}{5} x^{5/2} \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2}{5} x^{5/2} \arccos(\sqrt{x}) + \underbrace{\frac{1}{5} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \, dx}_{I_1}. \end{aligned}$$

Para la integral I_1 , sea $t^2 = 1 - x$, entonces $2t \, dt = -dx$. Sustituyendo en I_1 se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \, dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{t} (-2t \, dt) \\ &= -2 \int (t^4 - 2t^2 + 1) \, dt = -2 \left(\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + t \right) \\ &= -2 \left(\frac{(1-x)^{5/2}}{5} - 2\frac{(1-x)^{3/2}}{3} + (1-x)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int (\sqrt{x})^3 \arccos \sqrt{x} \, dx \\ &= \frac{2}{5} x^{5/2} \arccos(\sqrt{x}) + \frac{1}{5} I_1 \\ &= \frac{2}{5} x^{5/2} \arccos(\sqrt{x}) - \frac{2}{5} \left(\frac{(1-x)^{5/2}}{5} - 2\frac{(1-x)^{3/2}}{3} + (1-x)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 80** Determine $\int x \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$.

Solución

Sea

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ du &= dx & v &= -\frac{1}{3} \cos^3 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{x}{3} \cos^3 x - \left(-\frac{1}{3}\right) \int \cos^3 x \, dx \\
 &= -\frac{x}{3} \cos^3 x + \frac{1}{3} \int \cos^2 x \cos x \, dx \\
 &= -\frac{x}{3} \cos^3 x + \frac{1}{3} \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\
 &= -\frac{x}{3} \cos^3 x + \frac{1}{3} \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) + C.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 81** Determine $\int x^2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$

Solución

La integral se puede expresar como $I = \int x^2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx = \int x^2 \tan x \sec^2 x \, dx$.
Integrando por partes. Sea

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 & dv &= \tan x \sec^2 x \, dx \\
 du &= 2x \, dx & v &= \frac{\tan^2 x}{2}.
 \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{x^2}{2} \tan^2 x - \int x \tan^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \tan^2 x - \int x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \tan^2 x + \int x \, dx - \int x \sec^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \tan^2 x + \frac{x^2}{2} - \underbrace{\int x \sec^2 x \, dx}_{I_1}.
 \end{aligned}$$

Integrando I_1 por partes. Sea

$$\begin{aligned}
 u &= x & dv &= \sec^2 x \, dx \\
 du &= dx & v &= \tan x.
 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int x \sec^2 x \, dx = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

Entonces

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^2 x + \frac{x^2}{2} - I_1 = \frac{x^2}{2} \tan^2 x + \frac{x^2}{2} - x \tan x - \ln |\cos x| + C.$$

■ **Ejemplo 82** Determine $\int 3^{2x} \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) \, dx$.

Solución

$$\begin{aligned}
 I &= \int 3^{2x} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int 3^{2x} \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int 3^{2x} dx + \frac{1}{2} \int 3^{2x} \cos x dx \\
 &= \frac{1}{4 \ln 3} 3^{2x} + \underbrace{\frac{1}{2} \int 3^{2x} \cos x dx}_{I_1}.
 \end{aligned}$$

Para la integral I_1 usamos integración por partes. Sea

$$\begin{aligned}
 u &= 3^{2x} & dv &= \cos x dx \\
 du &= 3^{2x} 2 \ln 3 dx & v &= \sin x.
 \end{aligned}$$

Luego

$$I_1 = \int 3^{2x} \cos x dx = 3^{2x} \sin x - 2 \ln 3 \underbrace{\int 3^{2x} \sin x dx}_{I_2}$$

Para la integral I_2 también usamos integración por partes. Sea

$$\begin{aligned}
 u &= 3^{2x} & dv &= \sin x dx \\
 du &= 3^{2x} 2 \ln 3 dx & v &= -\cos x.
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int 3^{2x} \sin x dx = -3^{2x} \cos x + 2 \ln 3 \int 3^{2x} \cos x dx \\
 &= -3^{2x} \cos x + 2 \ln 3 I_1
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 3^{2x} \sin x - 2 \ln 3 I_2 \\
 &= 3^{2x} \sin x - 2 \ln 3 (-3^{2x} \cos x + 2 \ln 3 I_1) \\
 (1 + (2 \ln 3)^2) I_1 &= 3^{2x} \sin x + 2 \ln 3 \cdot 3^{2x} \cos x \\
 I_1 &= \frac{1}{1 + (2 \ln 3)^2} (3^{2x} \sin x + 2 \ln 3 \cdot 3^{2x} \cos x).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral inicial

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4 \ln 3} 3^{2x} + \frac{1}{2} I_1 \\
 &= \frac{1}{4 \ln 3} 3^{2x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (2 \ln 3)^2} (3^{2x} \sin x + 2 \ln 3 \cdot 3^{2x} \cos x) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 83** Determine $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

Solución

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \int (\ln x)^2 x^{-2} dx$$

Integrando por partes. Sea

$$\begin{aligned} u &= (\ln x)^2 & dv &= x^{-2} dx \\ du &= \frac{2 \ln x}{x} dx & v &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

así

$$\int (\ln x)^2 x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \ln x + 2 \underbrace{\int \frac{\ln x}{x^2} dx}_{I_1}$$

Integrando por partes I_1 , tenemos:

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^{-2} dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= -\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

entonces

$$I = -\frac{1}{x} \ln x + 2 \left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \right] = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} + C.$$

■

■ **Ejemplo 84** Determine $\int e^{2x} \sin^2(3x) dx$.

Solución

La integral se puede expresar

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x} \left(\frac{1 - \cos(6x)}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\int e^{2x} dx - \int e^{2x} \cos(6x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} - \underbrace{\int e^{2x} \cos(6x) dx}_{I_1} \right]. \end{aligned}$$

Integrando por partes I_1 . Sea

$$\begin{aligned} u &= \cos(6x) & dv &= dx \\ du &= -6 \sin(6x) dx & v &= \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

Así

$$I_1 = \frac{1}{2}e^{2x}\cos(6x) + 3 \underbrace{\int e^{2x}\sin(6x)dx}_{I_2}.$$

Integrando por partes I_2 .

$$\begin{aligned} u &= \sin(6x) & dv &= e^{2x}dx \\ du &= 6\cos(6x)dx & v &= \frac{1}{2}e^{2x}. \end{aligned}$$

Así

$$I_2 = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(6x) - 3 \underbrace{\int e^{2x}\cos(6x)dx}_{I_1}.$$

Entonces

$$I_1 = \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos(6x) + 3\frac{1}{2}e^{2x}\sin(6x) \right].$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos(6x) + \frac{3}{2}e^{2x}\sin(6x) \right] \right] + C.$$

■

■ **Ejemplo 85** Determine $\int xe^{x^2}\sin(x^2+1)dx$.

Solución

Sea $z = x^2$, tenemos $dz = 2xdx$ y la integral queda reducida a

$$I = \int xe^{x^2}\sin(x^2+1)dx = \frac{1}{2} \int e^z\sin(z+1)dz.$$

Integrando por partes. Sea

$$\begin{aligned} u &= \sin(z+1) & dv &= e^zdz \\ du &= \cos(z+1)dz & v &= e^z \end{aligned}$$

Así

$$2I = e^z\sin(z+1) - \underbrace{\int e^z\cos(z+1)dz}_{I_1}$$

Para I_1 , sea

$$\begin{aligned} u &= \cos(z+1) & dv &= e^zdz \\ du &= -\sin(z+1)dz & v &= e^z \end{aligned}$$

Entonces

$$I_1 = \int e^z \cos(z+1) dz = e^z \cos(z+1) + \int e^z \operatorname{sen}(z+1) dz = e^z \cos(z+1) + 2I.$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} 2I &= e^z \operatorname{sen}(z+1) - I_1 = e^z \operatorname{sen}(z+1) - (e^z \cos(z+1) + 2I) \\ I &= \frac{1}{4} (e^z \operatorname{sen}(z+1) - e^z \cos(z+1)) + C \\ &= \frac{1}{4} (e^{x^2} \operatorname{sen}(x^2+1) - e^{x^2} \cos(x^2+1)) + C. \end{aligned}$$

■

3.3 Ejercicios propuestos

1. $\int (2x - 3) \arccos x \, dx$
2. $\int \frac{x(x^2 + \ln x)}{(2x^2 + 1)} dx$
3. $\int \sin(bx) \sin(ax) \, dx$
4. $\int x^2 \sin(3x) \, dx$
5. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
6. $\int x^2 \arcsin(\sqrt{1 - x^2}) dx$
7. $\int x e^{2x} \sin x \, dx$
8. $\int \sin^2(\ln x) dx$
9. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$
10. $\int x \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) \, dx$
11. $\int \sin(\ln x^3) \, dx$
12. $\int x^{14} \ln(x^3) \, dx$
13. $\int \ln x \, dx$ Rpta. $x \ln x - x + C$
14. $\int \arcsin x \, dx$ Rpta. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$
15. $\int x \sin x \, dx$ Rpta. $-x \cos x + \sin x + C$
16. $\int x \cos(3x) \, dx$ Rpta. $\frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + C$
17. $\int x e^{-x} \, dx$ Rpta. $-\frac{x+1}{e^x} + C$
18. $\int x^2 e^{3x} \, dx$ Rpta. $\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C$
19. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx$ Rpta. $-(x^2 + 5) e^{-x} + C$
20. $\int x^3 e^{-x/3} \, dx$ Rpta. $-3e^{-x/3} (x^3 + 27x^2 + 54x + 162) + C$
21. $\int x \sin x \cos x \, dx$ Rpta. $-\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C$
22. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos(2x) \, dx$ Rpta. $\frac{(8x^2 + 40x + 47) \sin 2x}{16} + \frac{(2x + 5) \cos 2x}{4} + C$
23. $\int x^2 \ln x \, dx$ Rpta. $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

24. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ Rpta. $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$
25. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$
26. $\int x \arctan x dx$ Rpta. $\frac{(x^2+1) \arctan x}{2} - \frac{\pi}{2} + C$
27. $\int x \arcsen x dx$ Rpta. $\frac{x^2 \arcsen x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arcsen x}{2} + C$
28. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ Rpta. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1-x^2} + C$
29. $\int \frac{x}{\sen^2 x} dx$ Rpta. $-x \cot x + \ln |\sen x| + C$
30. $\int \frac{x \cos x}{\sen^2 x} dx$ Rpta. $-\frac{x}{\sen x} + \ln |\tan(\frac{x}{2})| + C$
31. $\int e^x \sen x dx$ Rpta. $\frac{e^x}{2} (\sen x - \cos x) + C$
32. $\int 3^x \cos x dx$ Rpta. $\frac{3^x (\sen x + \ln 3 \cos x)}{1 + \ln^2 3} + C$
33. $\int e^{ax} \sen(bx) dx$ Rpta. $\frac{e^{ax} (a \sen x - b \cos x)}{a^2 + b^2} + C$
34. $\int \sen(\ln x) dx$ Rpta. $\frac{x}{4} \sen(\ln x) - \frac{x}{4} \cos(\ln x) + C$
35. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ Rpta. $-x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} (1-x^2) + C$
36. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ Rpta. $\frac{1}{3} (2 - \sqrt{2})$
37. $\int x(2x+3)^5 dx$ Rpta. $\frac{x}{12} (2x+3)^6 - \frac{1}{168} (2x+3)^7 + C$
38. $\int x^3 \ln x dx$ Rpta. $\frac{x}{4} \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$
39. $\int (x+1)^2 \ln(x+1) dx$ Rpta. $\frac{1}{3} (x+1)^3 \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + C$
40. $\int x^2 e^x dx$ Rpta. $e^x (x^2 - 2x + 2) + C$
41. $\int e^x \cos x dx$ Rpta. $\frac{1}{2} e^x (\sen x + \cos x) + C$
42. $\int x \sec x \tan x dx$ Rpta. $x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C$
43. $\int \ln^2 x dx$ Rpta. $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$
44. $\int \arccos(2x) dx$ Rpta. $x \arccos(2x) + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$
45. $\int \cos \sqrt{x} dx$ Rpta. $2\sqrt{x} \sen \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$
46. $\int x \sec^2 x dx$ Rpta. $x \tan x + \ln |\cos x| + C$

$$47. \int \csc^5 x dx \quad \text{Rpta. } \frac{1}{4} [\csc^3 x \cot x - \frac{3}{2} (\csc x \cot x + \ln |\csc x + \cot x|)] + C$$

$$48. \int \frac{\arctan x}{x^2} dx \quad \text{Rpta. } -\frac{\arctan x}{x} + \ln x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$$

$$49. \int \frac{x \arctan x}{(x^2+1)^2} dx \quad \text{Rpta. } \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \arctan x - \frac{1}{2} \frac{\arctan x}{1+x^2} + C$$

$$50. \int e^{2x} \cos(e^x) dx \quad \text{Rpta. } e^x \sin(e^x) + 2 \cos(e^x) + C$$

$$51. \int \arctan(\sqrt{x+1}) dx \quad \text{Rpta. } (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + C$$

$$52. \int x \sin(3x) dx \quad \text{Rpta. } -\frac{x \cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + C$$

$$53. \int x e^{2x} dx \quad \text{Rpta. } \frac{e^{2x}(2x-1)}{4} + C$$

$$54. \int \sin(\ln x) dx \quad \text{Rpta. } \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C$$

55. Calcule el valor de $E = A + B + D$, si se cumple

$$\int (x+1)2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \left[x + B - \frac{D}{\ln 2} \right] + C$$

donde C es la constante de integración.

56. Calcule el valor de $E = B - A + D$, si se cumple

$$\int x^7 \arctan(x^4) dx = \frac{1}{A} x^B \arctan(x^4) + \frac{D}{8} x^4 + \frac{\arctan(x^4)}{8} + C$$

donde C es la constante de integración.

Producto de potencias de senos y cosenos
 Producto de senos y cosenos
 Potencias de: tangentes; cotangentes
 Potencias de: secante; cosecante
 Producto de potencias de tangentes y secantes
 Ejercicios resueltos
 Ejercicios propuestos

4. Integrales de funciones trigonométricas

En este capítulo se utilizará los capítulos anteriores para resolver integrales que involucren productos de potencias de funciones trigonométricas, según el valor de los exponentes hay muchas posibilidades, en este texto solo desarrollaremos las más usadas.

4.1 Producto de potencias de senos y cosenos

$$\int \sin^m u \cos^n u \, du$$

Requisitos

Al menos uno de los exponentes m ó n es un número natural(entero positivo) e impar; esto significa que si uno de los exponentes cumple los requisitos el otro puede ser cualquier número real, incluyendo el cero.

$$\int \sin^m u \cos^n u \, du$$

Procedimiento

Cuando $m = 2k + 1$ es el exponente natural impar, aislamos un factor $\sin u$ y transformamos el resto, usando la identidad $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$, en términos

de la función coseno, es decir,

$$\begin{aligned}\int \sin^{2k+1} u \cos^n u \, du &= \int \sin^{2k} u \sin u \cos^n u \, du \\ &= \int (\sin^2 u)^k \cos^n u \sin u \, du \\ &= \int (1 - \cos^2 u)^k \cos^n u \sin u \, du = \dots\end{aligned}$$

Realizando el cambio $t = \cos u$, aplicamos el binomio de Newton, la ley distributiva y la forma:

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

■ **Ejemplo 86** Determine $\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x} \cos^3 x} dx \\ &= \int \cos^{-10/3} x \sin^2 x \sin x \, dx \\ &= \int \cos^{-10/3} x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int \cos^{-10/3} x \sin x \, dx - \int \cos^{-4/3} x \sin x \, dx \\ &= -\frac{3 \cos^{-7/3} x}{7} + 3 \cos^{-1/3} x + C\end{aligned}$$

■

$$\int \sin^m u \cos^n u \, du$$

Procedimiento

Cuando $n = 2k + 1$ es el exponente natural impar, aislamos un factor $\cos u$ y transformamos el resto, usando la identidad $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$, en términos de la función seno, es decir,

$$\begin{aligned}\int \sin^m u \cos^{2k+1} u \, du &= \int \cos^{2k} u \cos u \sin^m u \, du \\ &= \int (\cos^2 u)^k \sin^m u \cos u \, du \\ &= \int (1 - \sin^2 u)^k \sin^m u \cos u \, du = \dots\end{aligned}$$

Luego se realiza el cambio $t = \sin u$ y aplicamos el binomio de Newton, la ley distributiva y la forma:

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

■ **Ejemplo 87** Determine $\int \sin^4(2x) \cos^3(2x) dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \sin^4(2x) \cos^3(2x) dx &= \int \sin^4(2x) \cos^2(2x) \cos(2x) dx \\ &= \int \sin^4(2x) (1 - \sin^2(2x)) \cos(2x) dx \\ &= \int \sin^4(2x) \cos(2x) dx - \int \sin^6(2x) \cos(2x) dx \\ &= \frac{\sin^5(2x)}{5} - \frac{\sin^7(2x)}{7} + C \end{aligned}$$

■

$$\int \sin^m u \cos^n u du$$

Requisitos

Cuando m y n son números naturales pares.

Procedimiento

En este caso vamos a disminuir los exponentes de las funciones seno o coseno correspondientes y luego usar las identidades trigonométricas

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}, \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}, \quad \sin u \cos u = \frac{\sin(2u)}{2}$$

Como el cero es un número natural par, es posible que estas integrales tengan una sola función, siempre y cuando el otro exponente cumpla el anterior requisito,

■ **Ejemplo 88** Determine $\int \sin^2(3x) \cos^2(3x) dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2(3x) \cos^2(3x) dx &= \int \frac{1 - \cos(6x)}{2} \frac{1 + \cos(6x)}{2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2(6x)) dx \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \cos^2(6x) dx \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos(12x)}{2} \right) dx \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \frac{\sin(12x)}{12} + C \\
 &= \frac{x}{8} - \frac{\sin(12x)}{96} + C
 \end{aligned}$$

■

4.2 Producto de senos y cosenos

Requisito:

m y n son números reales diferentes de cero.

Procedimiento:

Se presentan los siguientes casos:

1. $\int \sin(mu) \cos(nu) du$. Se aplica la identidad

$$\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

2. $\int \sin(mu) \sin(nu) du$. Se aplica la identidad

$$\sin(A) \sin(B) = \frac{1}{2} [-\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

3. $\int \cos(mu) \cos(nu) du$. Se aplica la identidad

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

* Recordar que $\cos(-A) = \cos(A)$ y $\sin(-A) = -\sin(A)$

■ **Ejemplo 89** Calcule $\int \sin(2x) \cos(4x) dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \sin(2x) \cos(4x) dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(6x) + \sin(-2x)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (\sin(6x) - \sin(2x)) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\cos(6x)}{6} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2x)}{2} + C \\
 &= -\frac{\cos(6x)}{12} + \frac{\cos(2x)}{4} + C
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 90** Calcule $\int \sin(7x) \sin(5x) dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \sin(7x) \sin(5x) dx &= \frac{1}{2} \int (-\cos(14x) + \cos(2x)) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\sin(14x)}{14} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{2} + C \\
 &= -\frac{\sin(14x)}{24} + \frac{\sin(2x)}{4} + C
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 91** Determine $\int \frac{\sin^2(5x)}{\sec(4x)} dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^2(5x)}{\sec(4x)} dx &= \int \left(\frac{1 - \cos(10x)}{2} \right) \cos(4x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (\cos(4x) - \cos(10x) \cos(4x)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int (\cos(14x) + \cos(6x)) dx \\
 &= \frac{\sin(4x)}{8} - \frac{\sin(14x)}{56} - \frac{\sin(6x)}{24} + C
 \end{aligned}$$

4.3 Potencias de: tangentes; cotangentes

$$\int \tan^m u \, du ; \int \cot^m u \, du$$

Requisitos:

El exponente m debe ser entero, si es negativo se pasa, mediante identidades de una función trigonométrica a la otra.

Procedimiento:

El exponente de la tangente se descompone en dos números de los cuales uno es el 2, para poder usar la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ de forma iterativa hasta que la última integral tenga exponente dos para aplicar la misma identidad y terminar con el ejercicio. Veamos

$$\begin{aligned}
 \int \tan^m u \, du &= \int \tan^2 u \tan^{m-2} u \, du \\
 &= \int [\sec^2 u - 1] \tan^{m-2} u \, du \\
 &= \int \sec^2 u \tan^{m-2} u \, du - \int \tan^{m-2} u \, du \\
 &= \int \sec^2 u \tan^{m-2} u \, du - \int \tan^2 u \tan^{m-4} u \, du \\
 &= \int \sec^2 u \tan^{m-2} u \, du - \int [\sec^2 u - 1] \tan^{m-4} u \, du \\
 &= \int \sec^2 u \tan^{m-2} u \, du - \int \sec^2 u \tan^{m-4} u \, du + \int \tan^{m-4} u \, du \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Para resolver las integrales hacemos $t = \tan u$, de manera reiterada.

■ **Ejemplo 92** Determine $\int \tan^4 x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx \\
 &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
 &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\
 &= \frac{\tan^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\
 &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C
 \end{aligned}$$

■

$\int \cot^m u \, du$

Procedimiento:

El exponente de la cotangente se descompone en dos números de los cuales uno es el 2, para poder usar la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ de forma iterativa hasta que la última integral tenga exponente dos para aplicar la misma identidad y terminar con el ejercicio. Veamos

$$\begin{aligned}
 \int \cot^m u \, du &= \int \cot^2 u \cot^{m-2} u \, du \\
 &= \int [\csc^2 u - 1] \cot^{m-2} u \, du \\
 &= \int \csc^2 u \cot^{m-2} u \, du - \int \cot^{m-2} u \, du \\
 &= \int \csc^2 u \cot^{m-2} u \, du - \int \cot^2 u \cot^{m-4} u \, du \\
 &= \int \csc^2 u \cot^{m-2} u \, du - \int [\csc^2 u - 1] \cot^{m-4} u \, du \\
 &= \int \csc^2 u \cot^{m-2} u \, du - \int \csc^2 u \cot^{m-4} u \, du + \int \cot^{m-4} u \, du \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Para resolver las integrales hacemos $t = \cot u$, de manera reiterada.

■ **Ejemplo 93** Determine $\int \tan^{-4} x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \tan^{-4} x \, dx &= \int \cot^4 x \, dx \\
 &= \int \cot^2 x \cot^2 x \, dx \\
 &= \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) \, dx \\
 &= \int \cot^2 x \csc^2 x \, dx - \int \cot^2 x \, dx \\
 &= -\frac{\cot^3 x}{3} - \int (\csc^2 x - 1) \, dx \\
 &= -\frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + C
 \end{aligned}$$

■

4.4 Potencias de: secante; cosecante

$$\int \sec^m u \, du ; \int \csc^m u \, du$$

Requisitos:

El exponente m debe ser entero positivo par, puesto que si es impar se usará integración por partes y si es par negativo se pasa a coseno, si es secante, y a seno, si es cosecante, de esta manera se usa la sección 1.

Procedimiento:

El exponente de la secante se descompone en dos números de los cuales uno es el 2, para poder usar la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ de forma iterativa hasta que la secante quede con exponente dos y terminar con el ejercicio. Veamos

$$\begin{aligned}
 \int \sec^m u \, du &= \int \sec^2 u \sec^{m-2} u \, du \\
 &= \int [1 + \tan^2 u] \sec^{m-2} u \, du \\
 &= \int [1 + \tan^2 u] \sec^2 u \sec^{m-4} u \, du \\
 &= \int \sec^2 u \sec^{m-4} u \, du + \int \tan^2 u \sec^2 u \sec^{m-4} u \, du \\
 &= \int [1 + \tan^2 u] \sec^2 u \sec^{m-6} u \, du - \\
 &\quad \int \tan^2 u [1 + \tan^2 u] \sec^2 u \sec^{m-6} u \, du \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 94** Determine $\int \sec^6 x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \sec^6 x \, dx &= \int \sec^2 x \sec^4 x \, dx \\
 &= \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
 &= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
 &= \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx + \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \\
 &= \int \sec^2 x \, dx + \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \\
 &\quad \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx \\
 &= \tan x + \frac{2 \tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C
 \end{aligned}$$

■

4.5 Producto de potencias de tangentes y secantes

Presentaremos tres posibilidades, los demás casos se sugiere llevarlos a seno y coseno para poder utilizar la primera sección. Cabe mencionar que los procedimientos sugeridos hasta el momento, podrían ser resueltos de otra manera, eso depende de la experiencia del lector.

$$\int \tan^m u \sec^n u \, du$$

Requisito:

$m = 2k + 1$ es un número natural impar y n es un número real.

Procedimiento:

Aislamos un factor $\tan u \sec u$, luego usar la identidad trigonométrica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$, para finalmente hacer el cambio $t = \sec u$.

$$\begin{aligned} \int \tan^{2k+1} u \sec^n u \, du &= \int \tan^{2k} u \sec^{n-1} u \tan u \sec u \, du \\ &= \int (\sec^2 u - 1)^k \sec^{n-1} u \tan u \sec u \, du \\ &= \dots \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 95** Determine $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \sec^3 x \tan x \sec x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \tan x \sec x \, dx \\ &= \int \sec^5 x \tan x \sec x \, dx - \int \sec^3 x \tan x \sec x \, dx \\ &= \frac{\sec^6 x}{6} - \frac{\sec^4 x}{4} + C \end{aligned}$$

■

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

Requisito:

m es un número real y n es un número natural par.

Procedimiento:

Aislamos un factor $\sec^2 u$, luego usar la identidad trigonométrica $\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$, para finalmente hacer el cambio $t = \tan u$.

$$\begin{aligned}\int \tan^m u \sec^n u \, du &= \int \tan^m u \sec^{n-2} u \sec^2 u \, du \\ &= \int \tan^m u (1 + \tan^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u \, du \\ &= \dots\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 96** Determine $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C\end{aligned}$$

■

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

Requisito:

m es un número natural par y n es un número entero impar negativo.

Procedimiento:

Descomponemos a m en potencias del número 2, se desarrolla el binomio y se usa la primera sección, si n es impar positivo se usa integración por partes.

$$\begin{aligned}\int \tan^m u \sec^n u \, du &= \int (\tan^2 u)^{\frac{m}{2}} u \sec^n u \, du \\ &= \int (\sec^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} \sec^n u \, du \\ &= \dots\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 97** Determine $\int \tan^4(2x) \sec^{-5}(2x) \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^4(2x) \sec^{-5}(2x) dx \\
&= \int (\tan^2(2x))^2 \sec^{-5}(2x) dx \\
&= \int (\sec^2(2x) - 1)^2 \sec^{-5}(2x) dx \\
&= \int (\sec^4(2x) - 2\sec^2(2x) + 1) \sec^{-5}(2x) dx \\
&= \int \sec^{-1}(2x) dx - 2 \int \sec^{-3}(2x) dx + \int \sec^{-5}(2x) dx \\
&= \int \cos(2x) dx - 2 \int \cos^3(2x) dx + \int \cos^5(2x) dx \\
&= \frac{\text{sen}(2x)}{2} - 2 \int \cos^2(2x) \cos(2x) dx + \int (\cos^2(2x))^2 \cos(2x) dx \\
&= \frac{\text{sen}(2x)}{2} - 2 \int (1 - \text{sen}^2(2x)) \cos(2x) dx + \int (1 - \text{sen}^2(2x))^2 \cos(2x) dx \\
&= \frac{\text{sen}(2x)}{2} - 2 \int (1 - \text{sen}^2(2x)) \cos(2x) dx + \\
&\quad \int (1 - 2\text{sen}^2(2x) + \text{sen}^4(2x)) \cos(2x) dx \\
&= \frac{\text{sen}(2x)}{2} - \text{sen}(2x) + \frac{\text{sen}^3(2x)}{3} + \frac{\text{sen}(2x)}{2} - \frac{\text{sen}^3(2x)}{3} + \frac{\text{sen}^5(2x)}{10} + C \\
&= \frac{\text{sen}^5(2x)}{10} + C
\end{aligned}$$

■

Nota

Puede que uno olvide los diferentes casos estudiados, de ocurrir ello se recomienda expresar el integrando en términos de senos y cosenos, para poder usar la sección 1 de este capítulo, llegar al resultado va a depender de la experiencia del lector.

■ **Ejemplo 98** El ejemplo anterior se puede trabajar de la siguiente forma

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \tan^4(2x) \sec^{-5}(2x) dx &= \int \frac{\sec^4(2x)}{\cos^4(2x) \sec^5(2x)} dx \\
 &= \int \frac{\sec^4(2x)}{\cos^4(2x)} \cos^5(2x) dx \\
 &= \int \sec^4(2x) \cos(2x) dx \\
 &= \frac{\sec^5(2x)}{5} + C
 \end{aligned}$$

■

4.6 Ejercicios resueltos

■ **Ejemplo 99** Determine $\int \tan(2x) \sqrt{\sec^5(2x)} dx$

Solución

Sea $u = \sec(2x)$, tenemos $du = 2 \tan(2x) \sec(2x) dx$, luego en la integral

$$\begin{aligned}
 \int \tan(2x) \sqrt{\sec^5(2x)} dx &= \int \sec^{3/2}(2x) \tan(2x) \sec(2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int u^{3/2} du = \frac{1}{5} u^{5/2} + C \\
 &= \frac{1}{5} (\sec(2x))^{5/2} + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 100** Determine $\int \sin(2x+1) \cos(7-4x) dx$

Solución

Usando la identidad $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$$\begin{aligned}
 \int \sin(2x+1) \cos(7-4x) dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(8-2x) + \sin(6x-6)] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin(8-2x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(6x-6) dx \\
 &= \frac{1}{4} \cos(8-2x) - \frac{1}{12} \cos(6x-6) dx + C
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 101** Determine $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Solución

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \sin x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \cos^2 x dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \cos^2 x dx \\
&= \int (\cos^2 x \sin x - 2\cos^4 x \sin x + \cos^6 x \sin x) dx \\
&= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C.
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 102** Determine $\int (2\sec^2 x + \tan x)^2 dx$

Solución

$$\begin{aligned}
(2\sec^2 x + \tan x)^2 &= 4\sec^4 x + \tan^2 x + 4\sec^2 x \tan x \\
&= 4\sec^2 x \sec^2 x + (\sec^2 x - 1) + 4\sec x \sec x \tan x \\
&= 4(\tan^2 x + 1)\sec^2 x + \sec^2 x - 1 + 4\sec x \sec x \tan x
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
I &= \int 4\tan^2 x \sec^2 x dx + 5 \int \sec^2 x dx - \int dx + 4 \int \sec x \sec x \tan x dx \\
&= \frac{4}{3} \tan^3 x + 5 \tan x - x + 2 \sec^2 x + C.
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 103** Determine $\int \frac{\tan^5(\sec(3x+2)) \sec^{-2/7}(\sec(3x+2))}{\sec(3x+2)} dx$.

Solución

Sea $u = \text{sen}(3x + 2)$, tenemos $du = 3 \cos(3x + 2) dx$, luego

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\tan^5(\text{sen}(3x + 2)) \sec^{-2/7}(\text{sen}(3x + 2))}{\sec(3x + 2)} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \tan^5 u \sec^{-2/7} u du \\
 &= \frac{1}{3} \int (\sec^2 u - 1)^2 \sec^{-9/7} u \tan u \sec u du \\
 &= \frac{1}{3} \int (\sec^4 u + 1 - 2 \sec^2 u) \sec^{-9/7} u \tan u \sec u du \\
 &= \frac{1}{3} \int \sec^{19/7} u \tan u \sec u du + \frac{1}{3} \int \sec^{-9/7} u \tan u \sec u du - \\
 &\quad \frac{2}{3} \int \sec^{5/7} u \tan u \sec u du \\
 &= \frac{7}{78} \sec^{26/7} u + \frac{7}{6} \sec^{-2/7} u - \frac{7}{18} \sec^{12/7} u + C \\
 &= \frac{7}{78} \sec^{26/7}(\text{sen}(3x + 2)) + \frac{7}{6} \sec^{-2/7}(\text{sen}(3x + 2)) - \\
 &\quad \frac{7}{18} \sec^{12/7}(\text{sen}(3x + 2)) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 104** Determine $\int \text{sen}(3x - 4) \cos^2(x) dx$

Solución

Usando las identidades:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad \text{y} \quad \text{sen } \alpha \text{ sen } \theta = \frac{1}{2} [\text{sen}(\alpha + \theta) + \text{sen}(\alpha - \theta)]$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \text{sen}(3x - 4) \cos^2(x) dx = \int \text{sen}(3x - 4) \frac{(1 + \cos 2x)}{2} dx \\
 &= \int \frac{\text{sen}(3x - 4)}{2} dx + \frac{1}{2} \int \text{sen}(3x - 4) \cos 2x dx \\
 &= -\frac{1}{6} \cos(3x - 4) + \frac{1}{4} \left[\int (\text{sen}(5x - 4) + \text{sen}(x - 4)) dx \right] \\
 &= -\frac{1}{6} \cos(3x - 4) - \frac{1}{20} \cos(5x - 4) - \frac{1}{4} \cos(x - 4) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 105** Determine $\int x \cos^2(2x^2) \text{sen}^2(2x^2) dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int x \cos^2(2x^2) \sin^2(2x^2) dx &= \frac{1}{4} \int x (2 \sin(2x^2) \cos(2x^2))^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int x \sin^2(4x^2) dx = \frac{1}{4} \int x \frac{(1 - \cos(8x^2))}{2} dx \\
 &= \frac{1}{8} \int x dx - \frac{1}{8} \int x \cos(8x^2) dx \\
 &= \frac{1}{16} x^2 - \frac{1}{128} \sin(8x^2) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 106** Determine $\int \cos^2(2x) \sin(5x) dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2(2x) \sin(5x) dx &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos(4x)) \sin(5x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin(5x) dx + \frac{1}{2} \int \cos(4x) \sin(5x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin(5x) dx + \frac{1}{4} \int (\sin(9x) + \sin(x)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin(5x) dx + \frac{1}{4} \int \sin(9x) dx + \frac{1}{4} \int \sin(x) dx \\
 &= -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{36} \cos(9x) - \frac{1}{4} \cos(x) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 107** Determine $\int \cos(3x^2) \sin(5x^2) x dx$.

Solución

Usando la identidad $\sin \alpha \cos \theta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \theta) + \sin(\alpha - \theta)]$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int [\sin(8x^2) + \sin(2x^2)] x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int x \sin(8x^2) dx + \frac{1}{2} \int x \sin(2x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{16} \sin(8x^2) (16x dx) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{4} \sin(2x^2) (4x dx) \\
 &= -\frac{1}{32} \cos(8x^2) - \frac{1}{8} \cos(2x^2) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 108** Determine $\int \frac{\cos(2x+3)}{\sqrt{1+\tan^2(x-1)}} dx$.

Solución

Usamos la identidad: $\cos \alpha \cos \theta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \theta) + \cos(\alpha + \theta)]$, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(2x+3)}{\sqrt{1+\tan^2(x-1)}} dx &= \int \frac{\cos(2x+3)}{\sec(x-1)} dx \\ &= \int \cos(2x+3) \cos(x-1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\cos(3x+2) + \cos(x+4)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(3x+2) dx + \frac{1}{2} \int \cos(x+4) dx \\ &= \frac{1}{6} \sin(3x+2) + \frac{1}{2} \sin(x+4) + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 109** Determine $\int \sin^{1/2}(7x) \cos^3(7x) dx$

Solución

Descomponemos el integrando

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^{1/2}(7x) \cos^3(7x) dx = \int \sin^{1/2}(7x) \cos^2(7x) \cos(7x) dx \\ &= \int \sin^{1/2}(7x) (1 - \sin^2(7x)) \cos(7x) dx \\ &= \int \sin^{1/2}(7x) \cos(7x) dx - \int \sin^{5/2}(7x) \cos(7x) dx \\ &= \frac{2}{21} \sin^{3/2}(7x) - \frac{2}{49} \sin^{7/2}(7x) + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 110** Determine $\int \cos^2(3x) \sin(2x) dx$.

Solución

Usando las identidades:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad \text{y} \quad \sin \alpha \cos \theta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \theta) + \sin(\alpha - \theta)] \quad \text{te-}$$

nemos:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cos^2(3x) \sin(2x) dx \\
 &= \int \left(\frac{1 + \cos(6x)}{2} \right) \sin(2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx - \frac{1}{2} \int \sin(2x) \cos(6x) dx \\
 &= -\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} [\sin(8x) - \sin(4x)] dx \\
 &= -\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{4} \int \sin(8x) dx + \frac{1}{4} \int \sin(4x) dx \\
 &= -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{32} \cos(8x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 111** Determine $\int \cos(5x-2) \sin^2(3x) dx$.

Solución

Usando las identidades:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad \text{y} \quad \cos \alpha \cos \theta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \theta) + \cos(\alpha + \theta)]$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cos(5x-2) \sin^2(3x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos(5x-2) (1 - \cos 6x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos(5x-2) dx - \frac{1}{2} \int \cos(5x-2) \cos 6x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos(5x-2) dx - \frac{1}{4} \int \cos(x+2) dx - \frac{1}{4} \int \cos(11x-2) dx \\
 &= \frac{1}{10} \sin(5x-2) - \frac{1}{4} \sin(x+2) - \frac{1}{44} \sin(11x-2) + C.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 112** Determine $\int \frac{\sin^3(3x)}{\sec^2(3x)} dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3(3x)}{\sec^2(3x)} dx &= \int \sin^3(3x) \cos^2(3x) dx \\
 &= \int \sin^2(3x) \sin(3x) \cos^2(3x) dx \\
 &= \int (1 - \cos^2(3x)) \cos^2(3x) \sin(3x) dx \\
 &= \int \cos^2(3x) \sin(3x) dx - \int \cos^4(3x) \sin(3x) dx \\
 &= -\frac{1}{9} \cos^3(3x) + \frac{1}{15} \cos^5(3x) + C.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 113** Determine $\int (1 + \cos(4x))^{3/2} \sin^{-3/2}(2x) dx$

Solución

En la integral, se tiene:

$$\begin{aligned}
 I &= \int (1 + \cos(4x))^{3/2} \sin^{-3/2}(2x) dx = 2\sqrt{2} \int \cos^3(2x) \sin^{-3/2}(2x) dx \\
 &= \sqrt{2} \int (1 - \sin^2(2x)) \sin^{-3/2}(2x) 2 \cos(2x) dx.
 \end{aligned}$$

Sea $u = \sin(2x)$ tenemos $du = 2 \cos(2x) dx$.

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{2} \int (1 - u^2) u^{-3/2} du = \sqrt{2} \int (u^{-3/2} - u^{1/2}) du \\
 &= -2\sqrt{2} u^{-1/2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} u^{3/2} + C = -2\sqrt{2} (\sin(2x))^{-1/2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin(2x)^{3/2} + C.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 114** Determine $\int \frac{x \csc^4(\ln(x^2 + 1)) \cot^3(\ln(x^2 + 1))}{x^2 + 1} dx$

Solución

Sea $u = \ln(x^2 + 1)$, tenemos $du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

y usando la identidad: $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x \csc^4(\ln(x^2 + 1)) \cot^3(\ln(x^2 + 1))}{x^2 + 1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \csc^4(u) \cot^3(u) du = \frac{1}{2} \int (\cot^2 u + 1) \csc^2(u) \cot^3(u) du.
 \end{aligned}$$

Haciendo otro cambio $z = \cot u$, tenemos $dz = -\csc^2 u du$

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{2} \int (z+1)z^3 dz = -\frac{1}{2} \int (z^4 + z^3) dz = -\frac{1}{10}z^5 - \frac{1}{8}z^4 + C \\
 &= -\frac{1}{10}(\cot u)^5 - \frac{1}{8}(\cot u)^4 + C \\
 &= -\frac{1}{10}(\cot(\ln(x^2+1)))^5 - \frac{1}{8}(\cot(\ln(x^2+1)))^4 + C \\
 &= -\frac{1}{10}\cot^5(\ln(x^2+1)) - \frac{1}{8}\cot^4(\ln(x^2+1)) + C
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 115** Determine $\int \csc^3(2x) \tan^2(2x) dx$.

Solución

$$\begin{aligned}
 \int \csc^3(2x) \tan^2(2x) dx &= \int \csc(2x) (1 + \cot^2(2x)) \tan^2(2x) dx \\
 &= \int \csc(2x) (\tan^2(2x) + 1) dx \\
 &= \int \csc(2x) \tan^2(2x) dx + \int \csc(2x) dx \\
 &= \int \frac{1}{\sin(2x)} \frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} dx + \int \csc(2x) dx \\
 &= \int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)} dx + \int \csc(2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos(2x)} + \frac{1}{2} \ln |\csc(2x) - \cot(2x)| + C.
 \end{aligned}$$

■

4.7 Ejercicios propuestos

1. $\int \operatorname{sen}(6x) \cos^2(x) dx$
2. $\int \csc^8(2x) \cot^5(2x) dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2(2x) \cos^2(2x) dx$
4. $\int \sec^4 x \sqrt{\cot^3 x} dx$
5. $\int \operatorname{sen}(7x) \cos(5x+3) \cos(2x) dx$
6. $\int \tan^3(2x) \sec^{5/2}(2x) dx$
7. $\int \operatorname{sen}^5(5x) \cos^{3/4}(5x) dx$
8. $\int \cot^{3/5} x \csc^6 x dx$
9. $\int \frac{\cos(\frac{5}{2}x)}{\sec^2(\frac{3}{2}x)} dx$
10. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \operatorname{sen} x + 3}$
11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4(5x)}$
12. $\int \operatorname{sen}(3-x) \cos(5-3x) dx$
13. $\int \operatorname{sen}^2 \theta \cos^3 \theta d\theta$ Rpta. $-\frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 \theta + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 \theta + C$
14. $\int \cos^5 x dx$ Rpta. $\frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x + C$
15. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$
16. $\int \operatorname{sen}^5(2x) \cos^2(2x) dx$ Rpta. $-\frac{1}{6} \cos^3(2x) + \frac{1}{5} \cos^5(2x) - \frac{1}{14} \cos^7(2x) + C$
17. $\int \frac{\operatorname{sen}^3(4x)}{\cos^2(4x)} dx$ Rpta. $\frac{1}{4} \sec(4x) + \frac{1}{4} \cos(4x) + C$
18. $\int \sec^4 t dt$ Rpta. $\frac{1}{3} \tan^3 t + \tan t + C$
19. $\int \cot^3(2x) dx$ Rpta. $-\frac{1}{4} \cot^2(2x) - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{sen}(2x)| + C$
20. $\int \tan^5(2x) \sec^2(2x) dx$ Rpta. $\frac{1}{12} \tan^6(2x) + C$
21. $\int \csc^6(2t) dt$ Rpta. $-\frac{\cot^5(2t)}{10} - \frac{\cot^3(2t)}{3} - \frac{\cot(2t)}{2} + C$
22. $\int \frac{\tan^3 t}{\sec^4 t} dt$ Rpta. $\frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 t + C$

23. $\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} dx$
24. $\int \frac{\cot \theta}{\csc^3 \theta} d\theta$ Rpta. $\frac{1}{3 \csc^3 \theta} + C$
25. $\int \cos^3(5t) dt$ Rpta. $-\frac{1}{15} \sin^3(5t) + \frac{\sin(5t)}{5} + C$
26. $\int \cot^4(3t) dt$ Rpta. $-\frac{1}{9} \cot^3(3t) + \frac{1}{3} \cot(3t) + t + C$
27. $\int \sin^5(2t) \cos^{3/2}(2t) dt$
28. $\int \sin(3x) \cos(5x) dx$ Rpta. $-\frac{1}{16} \cos(8x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C$
29. $\int \sin(2x) \sin(4x) dx$ Rpta. $\frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{12} \sin(6x) + C$
30. $\int \cos x \cos(4x) dx$ Rpta. $\frac{1}{6} \sin(3x) + \frac{1}{10} \sin(5x) + C$
31. $\int \sin^7(5x) \cos^3(5x) dx$ Rpta. $\frac{\sin^8(5x)}{40} - \frac{\sin^{10}(5x)}{50} + C$
32. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$ Rpta. $2\sqrt{\sin x} \left(\frac{\sin x}{3} - \frac{2}{7} \sin^3 x - \frac{1}{11} \sin^5 x \right) + C$
33. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ Rpta. $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$
34. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x \sqrt[3]{\cos x}} dx$ Rpta. $-\frac{3}{10} \cos^{10/3} x + \frac{3}{16} \cos^{16/3} x + C$
35. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$ Rpta. $\frac{1}{128} (3x - \sin(4x) + \frac{1}{8} \sin(8x)) + C$
36. $\int \sin^4 \left(\frac{x}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx$ Rpta. $\frac{x}{16} - \frac{\sin x \cos x}{16} - \frac{\sin^3 x}{24} + C$
37. $\int \tan^7 x \sec^4 x dx$ Rpta. $\frac{\tan^{10} x}{10} + \frac{\tan^8 x}{8} + C$
38. $\int \left(\frac{\sec x}{\tan x} \right)^4 dx$ Rpta. $-\frac{\cot^3 x}{3} - \cot x + C$
39. $\int \sec^4(2x) dx$ Rpta. $\frac{\tan(2x)}{2} + \frac{\tan^3(2x)}{6} + C$
40. $\int \sec^3 x \tan^3 x dx$ Rpta. $\frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C$
41. $\int \sin(4x) \cos(5x) dx$ Rpta. $\frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{\cos(9x)}{9} \right) + C$
42. $\int \cos x \cos^2(5x) dx$ Rpta. $\frac{1}{4} \left(2 \sin x + \frac{\sin(9x)}{9} + \frac{\sin(11x)}{11} \right) + C$
43. $\int \sin x \sin(2x) \sin(3x) dx$ Rpta. $-\frac{\cos(2x)}{8} - \frac{\cos(4x)}{16} - \frac{\cos(6x)}{24} + C$
44. $\int \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} \right) dx$ Rpta. $\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos(2x)}{4} + C$
45. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$

46. $\int \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

47. $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos^5 x dx$

48. $\int \sin(\cos x) \sin x dx$

49. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$

50. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x \sqrt[3]{\sin x}} dx$

5. Integración por sustitución trigonométrica

Utilizaremos este método cuando la función integrando tenga un factor $\sqrt{u^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, donde $u = u(x)$.

Para ver el cambio adecuado dibujaremos un triángulo rectángulo, ubicaremos los catetos y la hipotenusa. Luego, buscaremos la razón trigonométrica que nos de el cociente $\frac{u}{a}$ (en el numerador la expresión que depende de la variable de integración y en el denominador una constante)

5.1 Sustitución trigonométrica

Tenemos los siguientes tres casos:

Caso I: $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

$$\frac{u}{a} = \frac{C.O.}{Hip.} = \text{sen } \theta$$

cambio de variable: $u = a \text{ sen } \theta$

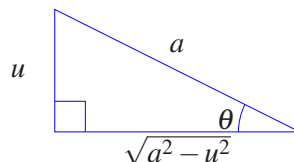
$$du = a \cos \theta \, d\theta$$

$$\text{de donde: } \theta = \text{arc sen} \left(\frac{u}{a} \right)$$

Además

$$\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} = \frac{C.A.}{Hip.} = \cos \theta$$

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$$



Caso II: $\sqrt{u^2 + a^2}$, $a > 0$

$$\frac{u}{a} = \frac{C.O.}{C.A.} = \tan \theta$$

Cambio de variable: $u = a \tan \theta$

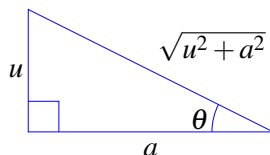
$$du = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$\text{de donde: } \theta = \arctan\left(\frac{u}{a}\right)$$

Además

$$\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a} = \frac{\text{Hip.}}{C.A.} = \sec \theta$$

$$\sqrt{u^2 + a^2} = a \sec \theta$$



Caso III: $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

$$\frac{u}{a} = \frac{\text{Hip.}}{C.A.} = \sec \theta$$

Cambio de variable: $u = a \sec \theta$

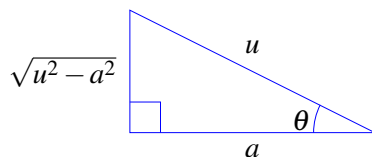
$$du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\text{de donde: } \theta = \text{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right)$$

Además

$$\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} = \frac{C.O.}{C.A.} = \tan \theta$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \theta$$



■ **Ejemplo 116** Verifique $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C$, $a > 0$

Solución

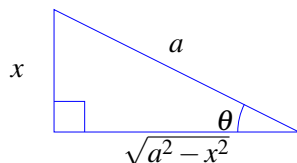
Dibujando un triángulo rectángulo

$$\frac{x}{a} = \sin \theta$$

$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

$$\theta = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$$



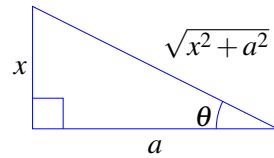
Además $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \cos \theta$

Reemplazando

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a \cos \theta \, d\theta}{a \cos \theta} = \int d\theta = \theta + C \\ &= \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 117** Verifique $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= \tan \theta \\ x &= a \tan \theta \\ dx &= a \sec^2 \theta \, d\theta \\ \theta &= \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} = \sec \theta$

Reemplazando

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \int \frac{a \sec^2 \theta \, d\theta}{a^2 \sec^2 \theta} = \frac{1}{a} \int d\theta = \frac{1}{a} \theta + C \\ &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C\end{aligned}$$

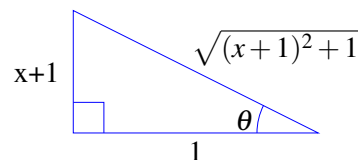
5.2 Ejercicios resueltos

■ **Ejemplo 118** Determine $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \, dx$

Solución

Como $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, del triángulo

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{1} &= \tan \theta \\ x+1 &= \tan \theta \\ \sec^2 \theta \, d\theta &= dx\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + 1}}{1} = \sec \theta$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} dx = \int \frac{(\tan \theta - 1)^2}{\sec \theta} (\sec^2 \theta) d\theta \\
 &= \int (\tan \theta - 1)^2 \sec \theta d\theta \\
 &= \int (\tan^2 \theta \sec \theta - 2 \tan \theta \sec \theta + \sec \theta) d\theta \\
 &= \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta - 2 \int \tan \theta \sec \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta \\
 &= \int \sec^3 \theta d\theta - \int \sec \theta d\theta - 2 \int \tan \theta \sec \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} [\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|] - 2 \sec \theta + C.
 \end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$I = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} (x + 1) + \ln \left| \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1 \right| \right) - 2\sqrt{x^2 + 2x + 2} + C.$$

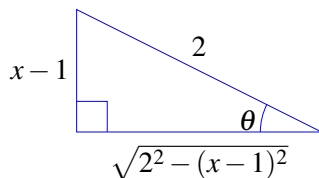
■ **Ejemplo 119** Determine $\int \frac{x+3}{(x-1)^2 \sqrt{3+2x-x^2}} dx$.

Solución

$$I = \int \frac{x+3}{(x-1)^2 \sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2 \sqrt{2^2 - (x-1)^2}} dx$$

Del triángulo

$$\begin{aligned}
 \frac{x-1}{2} &= \sin \theta \\
 x-1 &= 2 \sin \theta \\
 dx &= 2 \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{2^2 - (x-1)^2}}{2} = \cos \theta$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x+3}{(x-1)^2 \sqrt{2^2 - (x-1)^2}} dx \\
 &= \int \frac{(2 \sin \theta + 4)(2 \cos \theta)}{(2 \sin \theta)^2 (2 \cos \theta)} d\theta \\
 &= \int \frac{(\sin \theta + 2)}{2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \csc \theta d\theta + \int \csc^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \ln |\csc \theta - \cot \theta| - \cot \theta + C
 \end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{x-1} - \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-1} \right| - \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-1} + C$$

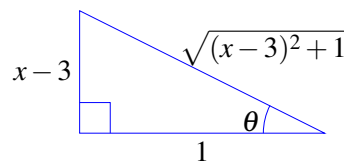
■ **Ejemplo 120** Determine $\int \frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} dx$.

Solución

$$I = \int \frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} dx = \int \frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{(x-3)^2 + 1}} dx$$

Del triángulo

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{1} &= \tan \theta \\ x-3 &= \tan \theta \\ dx &= \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{(x-3)^2 + 1}}{1} = \sec \theta$

Reemplazando

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan^2 \theta - 4}{\sec \theta} \sec^2 \theta d\theta = \int (\sec^2 \theta - 5) \sec \theta d\theta \\ &= \underbrace{\int \sec^3 \theta d\theta}_{I_1} - 5 \underbrace{\int \sec \theta d\theta}_{I_2} \end{aligned}$$

Integraremos por partes I_1 :

$$\begin{aligned} u &= \sec \theta & dv &= \sec^2 \theta d\theta \\ du &= \sec \theta \tan \theta d\theta & v &= \tan \theta \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|)$$

$$I_2 = \ln |\sec \theta + \tan \theta|.$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= I_1 - 5I_2 \\ &= \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta - 9 \ln |\sec \theta + \tan \theta|). \end{aligned}$$

Volviendo a la variable inicial:

$$I = \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2-6x+10} - \frac{9}{2}\ln\left|(x-3) + \sqrt{x^2-6x+10}\right| + C.$$

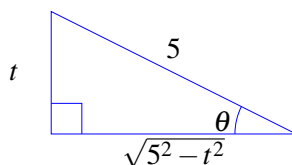
■ **Ejemplo 121** Determine $\int \frac{\sqrt{25-e^{2x}}+4}{e^x} dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{25-e^{2x}}+4}{e^x} dx &= \int \frac{\sqrt{25-e^{2x}}}{e^x} dx + 4 \int e^{-x} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{25-e^{2x}}}{e^x} dx - 4e^{-x}\end{aligned}$$

Sea $t = e^x$, entonces $dt = e^x dx$, luego se tiene $I_1 = \int \frac{\sqrt{5^2-t^2}}{t^2} dt$,
ahora del triángulo

$$\begin{aligned}\frac{t}{5} &= \sin \theta \\ t &= 5 \sin \theta \\ dt &= 5 \cos \theta d\theta \\ \theta &= \arcsen\left(\frac{t}{5}\right)\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{5^2-t^2}}{5} = \cos \theta$

Así,

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{\sqrt{5^2-t^2}}{t^2} dt = \int \frac{5 \cos \theta}{25 \sin^2 \theta} 5 \cos \theta d\theta \\ &= \int \cot^2 \theta d\theta = \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta \\ &= -\cot \theta - \theta + C \\ &= -\frac{\sqrt{25-t^2}}{t} - \arcsen\left(\frac{t}{5}\right) + C\end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$I_1 = -\frac{\sqrt{25-e^{2x}}}{e^x} - \arcsen\left(\frac{e^x}{5}\right) + C$$

De donde

$$\int \frac{\sqrt{25-e^{2x}}+4}{e^x} dx = -\frac{\sqrt{25-e^{2x}}}{e^x} - \arcsen\left(\frac{e^x}{5}\right) - 4e^{-x} + C$$

■

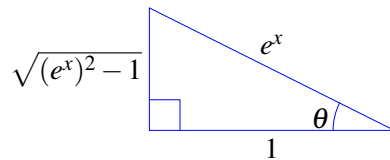
■ **Ejemplo 122** Determine $\int \frac{(e^x - 1)^2}{(\sqrt{e^{2x} - 1})^3} dx$.

Solución

$$I = \int \frac{(e^x - 1)^2}{(\sqrt{e^{2x} - 1})^3} dx = \int \frac{(e^x - 1)^2}{(\sqrt{(e^x)^2 - 1})^3} dx$$

Del triángulo

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1} &= \sec \theta \\ e^x &= \sec \theta \\ e^x dx &= \sec \theta \tan \theta d\theta \\ \theta &= \operatorname{arcsec}(e^x)\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{1} = \tan \theta$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{(e^x - 1)^2}{(\sqrt{e^{2x} - 1})^3} dx &= \int \frac{(\sec \theta - 1)^2 \tan \theta}{(\tan \theta)^3} d\theta \\ &= \int \frac{(\sec^2 \theta - 2 \sec \theta + 1)}{\tan^2 \theta} d\theta \\ &= \int (\csc^2 \theta - 2 \cot \theta \csc \theta + \csc^2 \theta - 1) d\theta \\ &= -2 \cot \theta + 2 \csc \theta - \theta + C\end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$\int \frac{(e^x - 1)^2}{(\sqrt{e^{2x} - 1})^3} dx = -\frac{2}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \frac{2e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} - \operatorname{arcsec}(e^x) + C.$$

■

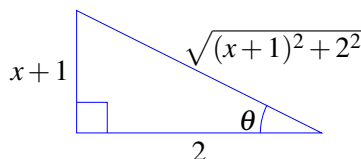
■ **Ejemplo 123** Determine $\int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$.

Solución

$$I = \int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx = \int \frac{x^2 + x}{\sqrt{(x+1)^2 + 2^2}} dx$$

Del triángulo

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} &= \tan \theta \\ x+1 &= 2 \tan \theta \\ dx &= 2 \sec^2 \theta d\theta\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + 2^2}}{2} = \sec \theta$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{x^2 + x}{\sqrt{(x+1)^2 + 2^2}} dx \\ &= \int \frac{(2 \tan \theta - 1)(2 \tan \theta)}{2 \sec \theta} (2 \sec^2 \theta) d\theta \\ &= \int (4 \tan^2 \theta - 2 \tan \theta) \sec \theta d\theta \\ &= 4 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta - 2 \int \tan \theta \sec \theta d\theta \\ &= 4 \int \sec^3 \theta d\theta - 4 \int \sec \theta d\theta - 2 \int \tan \theta \sec \theta d\theta \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{1}{2} \ln |\tan \theta + \sec \theta| \right] - 4 \ln |\sec \theta + \tan \theta| - 2 \sec \theta + C \\ &= 2 \tan \theta \sec \theta - 2 \ln |\tan \theta + \sec \theta| - 2 \sec \theta + C\end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$I = \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}}{2} - 2 \ln \left| \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+5}}{2} \right| - \sqrt{x^2+2x+5} + C.$$

■

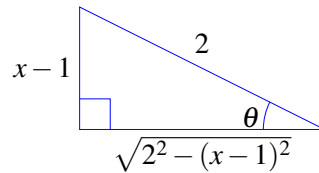
■ **Ejemplo 124** Determine $\int \frac{x+1}{(8-2(x-1)^2)^{3/2}} dx$.

Solución

$$I = \int \frac{x+1}{(8-2(x-1)^2)^{3/2}} dx = \int \frac{x+1}{2^{3/2} (2^2 - (x-1)^2)^{3/2}} dx$$

Haciendo

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{2} &= \operatorname{sen} \theta \\ x-1 &= 2 \operatorname{sen} \theta \\ dx &= 2 \cos \theta \, d\theta\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{2^2 - (x-1)^2}}{2} = \cos \theta$

$$(2^2 - (x-1)^2)^{3/2} = (2^2 \cos^2 \theta)^{3/2} = 8 \cos^3 \theta.$$

De donde

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta + 2}{2^{3/2} (2 \cos \theta)^3} 2 \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{\operatorname{sen} \theta + 1}{\cos^2 \theta} \, d\theta \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} + \sec^2 \theta \right) \, d\theta \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta + \int \sec^2 \theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) + C.\end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$\int \frac{x+1}{(8-2(x-1)^2)^{3/2}} \, dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \right) + C.$$

■

■ **Ejemplo 125** Determine $\int \frac{2^{ex} \sqrt{3+2^{1+ex}-2^{2ex}}}{(2^{ex}-1)^2} \, dx$.

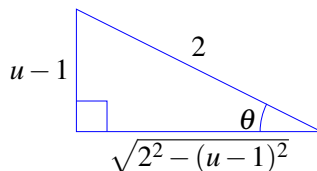
Solución

Sea $u = 2^{ex}$, tenemos $du = (e \ln 2) 2^{ex} \, dx$

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{2^{ex} \sqrt{3+2(2^{ex})-(2^{ex})^2}}{(2^{ex}-1)^2} \, dx = \frac{1}{e \ln 2} \int \frac{\sqrt{3+2u-u^2}}{(u-1)^2} \, du \\ &= \frac{1}{e \ln 2} \int \frac{\sqrt{2^2-(u-1)^2}}{(u-1)^2} \, du\end{aligned}$$

Del triángulo

$$\begin{aligned}\frac{u-1}{2} &= \operatorname{sen} \theta \\ u-1 &= 2 \operatorname{sen} \theta \\ du &= 2 \cos \theta \, d\theta \\ \theta &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{u-1}{2} \right)\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{2^2 - (u-1)^2}}{2} = \cos \theta$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{e \ln 2} \int \frac{\sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta} (2 \cos \theta)}{(2 \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta = \frac{1}{e \ln 2} \int \frac{4 \cos^2 \theta}{4 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{e \ln 2} \int \cot^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{e \ln 2} \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{e \ln 2} (-\cot \theta - \theta) + C\end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$I = -\frac{1}{e \ln 2} \left(\frac{\sqrt{3 + 2^{1+ex} - 2^{2ex}}}{2^{ex} - 1} + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{2^{ex} - 1}{2} \right) \right) + C.$$

■ **Ejemplo 126** Determine $\int \frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\sqrt{x+6\sqrt{x}+10}} dx$.

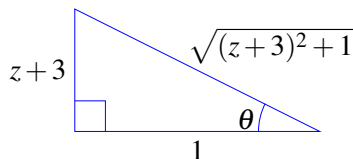
Solución

Sea $z = \sqrt{x}$, tenemos $dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Reemplazando

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\sqrt{x+6\sqrt{x}+10}} dx = \int \frac{5z+2}{z\sqrt{z^2+6z+10}} (2zdz) \\ &= 2 \int \frac{5z+2}{\sqrt{(z+3)^2+1}} dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z+3}{1} &= \tan \theta \\ z+3 &= \tan \theta \\ dz &= \sec^2 \theta \, d\theta\end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{(z+3)^2+1}}{1} = \sec \theta$

Reemplazando

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{5(\tan \theta - 3) + 2}{\sec \theta} \sec^2 \theta d\theta = 2 \int (5 \tan \theta - 13) \sec \theta d\theta \\ &= 2[5 \sec \theta - 13 \ln |\tan \theta + \sec \theta|] + C. \end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$I = 10\sqrt{x+6\sqrt{x}+10} - 26 \ln \left| \sqrt{x}+3 + \sqrt{x+6\sqrt{x}+10} \right| + C$$

■ **Ejemplo 127** Determine $\int \frac{x(x-1)}{\sqrt{1-x}\sqrt{2-x}} dx$.

Solución

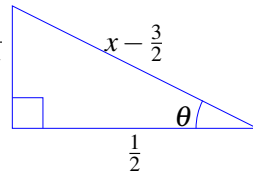
$$I = \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{1-x}\sqrt{2-x}} dx = \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx = \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}} dx$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \sec \theta$$

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sec \theta$$

$$dx = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}$$



Además

$$\frac{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}}{\frac{1}{2}} = \tan \theta$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{1-x}\sqrt{2-x}} dx \\ &= \int \frac{(\frac{1}{2} \sec \theta + \frac{3}{2})(\frac{1}{2} \sec \theta + \frac{3}{2} - 1) \frac{1}{2} \tan \theta \sec \theta d\theta}{\frac{1}{2} \tan \theta} \\ &= \frac{1}{4} \int (\sec \theta + 3)(\sec \theta + 1) \sec \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int [\sec^3 \theta + 4 \sec^2 \theta + 3 \sec \theta] d\theta \end{aligned}$$

Integrando cada sumando:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left[\int \sec^3 \theta \, d\theta + 4 \int \sec^2 \theta \, d\theta + 3 \int \sec \theta \, d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + 4 \tan \theta + 3 \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right] + C \end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left[(2x-3)\sqrt{1-x}\sqrt{2-x} + \frac{7}{2} \ln |2x-3+2\sqrt{1-x}\sqrt{2-x}| + \right. \\ &\quad \left. + 8\sqrt{1-x}\sqrt{2-x} \right] + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 128** Determine $\int \left(2 + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{(2x + \ln x)^2 - 9}}$.

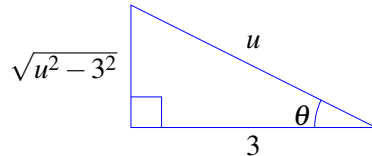
Solución

Sea $u = 2x + \ln x$, entonces $du = \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx$, luego

$$I = \int \left(2 + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{(2x + \ln x)^2 - 9}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 3^2}}.$$

Del triángulo

$$\begin{aligned} \frac{u}{3} &= \sec \theta \\ u &= 3 \sec \theta \\ du &= 3 \sec \theta \tan \theta \, d\theta \end{aligned}$$



Además $\frac{\sqrt{u^2 - 3^2}}{3} = \tan \theta$

Así

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 9}} = \int \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{\sqrt{9 \sec^2 \theta - 9}} \, d\theta = \int \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{3 \tan \theta} \, d\theta \\ &= \int \sec \theta \, d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 - 9} + u}{3} \right| + C \end{aligned}$$

Volviendo a la variable x

$$I = \ln \left| \frac{\sqrt{(2x + \ln x)^2 - 9} + 2x + \ln x}{2} \right| + C.$$

■

5.3 Ejercicios propuestos

$$1. \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{(x + \ln x)^2 + 2}} dx$$

$$2. \int e^x \sqrt{9 - e^{2x}} dx$$

$$3. \int \frac{(x-7)}{5-4x-x^2} dx$$

$$4. \int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^3} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+5}}$$

$$6. \int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x (4 - \tan^2 x)^{3/2}}$$

$$8. \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$$

$$9. \int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-2}} dx$$

$$10. \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$$

$$11. \int \frac{3}{(\sqrt{x^2+5})^3} dx$$

$$12. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-16}}$$

$$13. \int \frac{\tan(3x) + \cot(3x)}{\sec(3x)} dx$$

$$14. \int \frac{1}{x(1-x)} dx, \text{ use } x = \sin u$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{7+8x^2}} dx$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx$$

$$17. \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$18. \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$19. \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$$

Rpta.

$$\text{Rpta. } 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \right| + C$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2}| + C$$

$$\text{Rpta. } -\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\text{Rpta. } \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} \right| + C$$

$$\text{Rpta. } \ln |\sqrt{4+x^2} + x| + C$$

$$\text{Rpta. } \sqrt{x^2-9} - \operatorname{arcsec} \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

20. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C$
21. $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$ Rpta. $-\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$
22. $\int \frac{1}{(4x^2-9)^{3/2}} dx$ Rpta. $\frac{-x}{9\sqrt{4x^2-9}} + C$
23. $\int x^3 \sqrt{3x-2} dx$ Rpta. $\frac{2(\sqrt{3x-2})^9}{729} + \frac{8(\sqrt{3x-2})^7}{159} + \frac{8(\sqrt{3x-2})^5}{135} + \frac{16(\sqrt{3x-2})^3}{243} + C$
24. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ Rpta. $-\ln|1-x| + 2\sqrt{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C$
25. $\int \frac{x^3}{(x^2-1)^{4/3}} dx$ Rpta. $\frac{3}{4} \frac{-3+x^2}{\sqrt[3]{x^2-1}} + C$
26. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$ Rpta. $-\frac{1}{5}(\sqrt[4]{x})^5 + x + C$
27. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}} dx$ Rpta. $\frac{2}{9}x^3\sqrt{x^3+1} - \frac{8}{9}\sqrt{x^3+1} + C$
28. $\int \frac{1}{1+\sen\theta} d\theta$
29. $\int \frac{1}{\sen\theta + \cos\theta} d\theta$
30. $\int \frac{\sen\theta}{2+\cos\theta} d\theta$
31. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$ Rpta. $-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2} - \frac{x^2\sqrt{2-x^2}}{3} + C$
32. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$ Rpta. $\sqrt{x^2-a^2} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C$
33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$
34. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$ Rpta. $\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$
35. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$ Rpta. $-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2} - \frac{x^2\sqrt{2-x^2}}{3} + C$
36. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ Rpta. Si $x > 0$, $\arccos\frac{1}{x} + C$; Si $x < 0$, $\arccos(-\frac{1}{x}) + C$
37. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right| + \sqrt{x^2+1} + C$
38. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$ Rpta. $-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$
39. $\int \sqrt{1-x^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\arcsen x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

40. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx$ Rpta. $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+1}| + C$
41. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$ Rpta. $\sqrt{x^2-4} + 3 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C$
42. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx$ Rpta. $\frac{1}{3} \ln|3x^2-2| - \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right| + C$
43. $\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} dx$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
44. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{(e^{2x}-2e^x+5)^3}} dx$ Rpta. $\frac{e^x-5}{4\sqrt{e^{2x}-2e^x+5}} + C$
45. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4-\tan^2 x}} dx$ Rpta. $\arcsin\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C$
46. $\int \frac{1}{2\sin x + 3\cos x - 5} dx$ Rpta. $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{4\tan(\frac{x}{2})-1}{\tan x}\right) + C$
47. $\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{\tan \frac{x}{2}}{1+\tan \frac{x}{2}}\right| + C$
48. $\int \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 3} dx$ Rpta. $\arctan(1 + \tan \frac{x}{2}) + C$
49. $\int \frac{1}{2\sin x + 2\cos x + 3} dx$ Rpta. $2\arctan(2 + \tan \frac{x}{2}) + C$
50. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}} dx$
51. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
52. $\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin(2x)} dx$ sugerencia: $t = \sin x - \cos x$
53. $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}} dx$
54. $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx$
55. $\int \frac{1}{x^3+1} dx$
56. $\int \sqrt{1-x^2} dx$
57. $\int \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} dx$
58. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)(6-x)}}$ sugerencia $x-5 = \sin^2 t$
59. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} dx$
60. $\int \frac{1}{(x^2+4)^{3/2}} dx$

61. $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$

62. $\int \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x} dx$

63. $\int \frac{e^x}{1+3e^{2x}} dx$

Función racional
 Descomposición en fracciones parciales
 Ejercicios resueltos
 Funciones racionales de senos y cosenos
 Ejercicios resueltos
 Ejercicios propuestos

6. Integración de funciones racionales

6.1 Función racional

Una **función racional** o **cociente de polinomios** es una función que tiene la siguiente forma $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios con coeficientes en el conjunto de los números reales de grado n y m respectivamente.

- Si $n < m$ la función racional es **propia**.
- Si $n \geq m$ la función racional es **impropia**.

■ **Ejemplo 129** Dadas las funciones racionales

$$F(x) = \frac{x^3 - 4x + 1}{x^2 + 2x - 3}; \quad G(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^7 + 4x^3 - 8}$$

- $F(x)$ es una función racional impropia.
- $G(x)$ es una función racional propia.

Si $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ es una función racional impropia, se debe realizar una división de polinomios y expresar:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = s(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)}$$

donde $s(x)$ es un polinomio y $\frac{R_r(x)}{Q_m(x)}$ es una función racional propia.

6.2 Descomposición en fracciones parciales

La integración de funciones racionales requiere una descomposición en fracciones simples, llamadas **fracciones parciales**.

Para ilustrar el método, observe el procedimiento al operar las siguientes fracciones

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1} &= \frac{2(x+1) + x-3}{(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}\end{aligned}$$

Ahora, si se invierte el procedimiento, verá cómo integrar la función del lado derecho de esta ecuación

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)} dx &= \int \left[\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= 2\ln|x-3| + \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior podemos notar que el denominador está factorizado, lo cual nos invita a ver los siguientes cuatro casos:

6.2.1 Caso I. Factores lineales no repetidos

Si el denominador $Q_m(x)$ tiene factores lineales distintos y ninguno se repite.

Es decir, si

$$Q_m(x) = \cdots (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k) \cdots$$

entonces

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \cdots + \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k} + \cdots$$

■ **Ejemplo 130** Determine $\int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 7}{x^2 - x - 2} dx$

Solución

Como el integrando es una función racional impropia, primero dividiremos y luego factorizaremos el denominador

$$\frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 7}{x^2 - x - 2} = x^2 - 3x + \frac{-2x + 7}{x^2 - x - 2} = x^2 - 3x + \frac{-2x + 7}{(x+1)(x-2)}.$$

Expresamos la función racional propia como suma de fracciones parciales

$$\frac{-2x+7}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Determinamos los valores de A y B

$$-2x+7 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$-2x+7 = (A+B)x - 2A + B$$

Igualando los coeficientes: $\begin{cases} A+B = -2 \\ -2A+B = 7 \end{cases}$ obtenemos $\begin{matrix} A = -3 \\ B = 1 \end{matrix}$

Así

$$\frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 7}{x^2 - x - 2} = x^2 - 3x + \frac{-3}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$

Integramos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 7}{x^2 - x - 2} dx \\ &= \int \left[x^2 - 3x + \frac{-3}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right] dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 3 \ln |x+1| + \ln |x-2| + C \end{aligned}$$

■

6.2.2 Caso II. Factores lineales repetidos

Si el denominador $Q_m(x)$ tiene factores lineales y algunos de ellos se repiten.

Es decir, si el factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite k veces.

$$Q_m(x) = \cdots (a_1x + b_1)^k \cdots$$

entonces

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \cdots + \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(a_1x + b_1)^k} + \cdots$$

■ **Ejemplo 131** Determine $\int \frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2(x-2)} dx$

Solución

El integrando es una función racional propia y el denominador está factorizado por ello la descomponemos en una suma de fracciones parciales.

$$\frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

Determinamos los valores de A , B y C

$$\begin{aligned} 3x^2 - 7x + 6 &= Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2A)x - 2B \end{aligned}$$

$$\text{Igualando los coeficientes: } \begin{cases} A+C=3 \\ B-2A=-7 \\ -2B=6 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{matrix} C=1 \\ A=2 \\ B=-3 \end{matrix}$$

Así

$$\frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2(x-2)} = \frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{1}{x-2}$$

Integramos

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2(x-2)} dx &= \int \left[\frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{1}{x-2} \right] dx \\ &= 2 \ln|x| + \frac{3}{x} + \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

■

6.2.3 Caso III. Factores cuadráticos no factorizables y no repetidos

Si el denominador $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos no factorizables distintos y ninguno se repite.

Es decir, si

$$Q_m(x) = \cdots (ax^2 + bx + c) \cdots$$

entonces

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \cdots + \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \cdots$$

■ **Ejemplo 132** Determine $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2 - x^2} dx$

Solución

El integrando es una función racional propia; factorizamos el denominador

$$(x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

descomponemos en fracciones parciales

$$\frac{2x}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

de donde

$$2x = (Ax + B)(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1)$$

$$2x = (A + C)x^3 + (A + B - C + D)x^2 + (A + B + C - D)x + B + D$$

$$\text{Igualando los coeficientes: } \begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - C + D = 0 \\ A + B + C - D = 2 \\ B + D = 0 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{cases} C = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

Integrando

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 - x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx + \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3}/2)} \arctan \left(\frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2} \right) + \frac{1}{(\sqrt{3}/2)} \arctan \left(\frac{x + 1/2}{\sqrt{3}/2} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

■

6.2.4 Caso IV. Factores cuadráticos no factorizables y repetidos

Si el denominador $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos no factorizables repetidos.

Es decir, si

$$Q_m(x) = \cdots (ax^2 + bx + c)^k \cdots$$

entonces

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \cdots + \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k} + \cdots$$

■ **Ejemplo 133** Determine $\int \frac{2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)^2} dx$

Solución

El integrando es una función racional propia, el denominador está factorizado, podemos descomponerlo en fracciones parciales.

$$\frac{2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Determinamos los valores de A , B , C , D y E

$$\begin{aligned} 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x \end{aligned}$$

$$\text{Igualando los coeficientes : } \begin{cases} A + B = 2 \\ C = 3 \\ 2A + B + D = 3 \\ C + E = 3 \\ A = 2 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{cases} B = 0 \\ D = -1 \\ E = 0 \end{cases}$$

Integramos

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)^2} &= \int \left[\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{-x}{(x^2 + 1)^2} \right] dx \\ &= 2 \ln |x| + 3 \arctan x + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \end{aligned}$$

■

6.3 Ejercicios resueltos

■ **Ejemplo 134** Determine $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-2x+5)}$

Solución

El integrando es una función racional propia, el denominador está factorizado, podemos descomponerlo en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+5)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \\ 1 &= A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+1) \\ 1 &= (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + 5A+C \end{aligned}$$

igualando los coeficientes:

$$\begin{cases} A + B = 0 & A = \frac{1}{4} \\ 2A + B + C = 0 & \text{se obtiene } B = -\frac{1}{4}, \\ 5A + C = 1 & C = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Integramos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+5)} &= \int \left(\frac{1}{4(x+1)} - \frac{x+1}{4(x^2+2x+5)} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{8} \ln|x^2+2x+5| + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 135** Determine $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 8x - 4}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5} dx$

Solución

El integrando es una función racional impropia, por ello primero dividiremos

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 8x - 4}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5} = x + 2 + \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5}$$

Factorizamos el denominador y descomponemos a la función racional propia en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5} &= \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-1)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 - 4x + 5} \\ x^2 - 5x + 6 &= A(x^2 - 4x + 5) + (Bx+C)(x-1) \\ x^2 - 5x + 6 &= (A+B)x^2 + (C-B-4A)x + 5A - C. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C - B - 4A = -5 \\ 5A - C = 6 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases}.$$

Integramos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 3x^3 + 8x - 4}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5} dx &= \int \left[x + 2 + \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5} \right] dx \\ &= \int x dx + \int 2 dx + \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x^2 - 4x + 5} \right] dx \\ &= \int x dx + \int 2 dx + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-1| - \arctan(x-2) + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 136** Determine $\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 5x + 3}{(x-2)^2(x^2+3)} dx$

Solución

El integrando es una función racional propia, el denominador está factorizado y podemos descomponerlo en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 4x^2 - 5x + 3}{(x-2)^2(x^2+3)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} \\ &= A(x-2)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x-2)^2 \\ 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3 &= (A+C)x^3 + (-2A+B-4C+D)x^2 + \\ &\quad (3A+4C-4D)x - 6A+3B+4D. \end{aligned}$$

$$\text{Igualando coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} A+C=2 \\ -2A+B-4C+D=-4 \\ 3A+4C-4D=-5 \\ -6A+3B+4D=3 \end{array} \right. \quad \text{obtenemos} \quad \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=3 \end{array}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 5x + 3}{(x-2)^2(x^2+3)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x+3}{x^2+3} \right) dx \\ &= \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + 3 \int \frac{1}{x^2+3} dx \\ &= \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 137** Determine $\int \frac{3x^3 + 8x^2 + 11x}{(x^2+3)(x+2)^2} dx$

Solución

El integrando es una función racional propia, el denominador está factorizado y podemos descomponerlo en fracciones parciales

$$\frac{3x^3 + 8x^2 + 11x}{(x^2+3)(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\begin{aligned} 3x^3 + 8x^2 + 11x &= A(x+2)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x+2)^2 \\ 3x^3 + 8x^2 + 11x &= (A+C)x^3 + (2A+B+4C+D)x^2 + (4D+3A+4C)x + \\ &\quad + 6A+3B+4D \end{aligned}$$

$$\text{Igualando los coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} A + C = 3 \\ 2A + B + 4C + D = 8 \\ 3A + 4D + 4C = 11 \\ 6A + 3B + 4D = 0 \end{array} \right. \quad \text{obtenemos} \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 2 \\ D = 0 \end{array}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 + 8x^2 + 11x}{(x^2 + 3)(x + 2)^2} dx &= \int \left[\frac{1}{x + 2} + \frac{-2}{(x + 2)^2} + \frac{2x}{x^2 + 3} \right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x + 2} - \int \frac{2dx}{(x + 2)^2} + \int \frac{2xdx}{x^2 + 3} \\ &= \ln|x + 2| + \frac{2}{x + 2} + \ln(x^2 + 3) + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 138** Determine $\int \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)} dx$

Solución

El integrando es una función racional propia, factorizaremos el denominador y lo descomponemos en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)} &= \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} \\ &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ 2x^3 + 2x^2 - 4x + 2 &= A(x^2 + 1)(x - 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Dando valores a x

$$\begin{array}{llll} \text{si } x = 1 & 2 = 2B & B = 1 & \text{donde } A = 2 \\ \text{si } x = 0 & 2 = -A + 1 + D & A - D = -1 & B = 1 \\ \text{si } x = -1 & 6 = -4A + 2 - 4C + 4D & A + C - D = -1 & C = 0 \\ \text{si } x = 2 & 18 = 5A + 5 + 2C + D & 5A + 2C + D = 13 & D = 3 \end{array}$$

Integramos

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)} dx &= \int \left[\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{3}{x^2 + 1} \right] dx \\ &= \int \frac{2dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + \int \frac{3dx}{x^2 + 1} \\ &= 2\ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + 3\arctan x + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 139** Determine $\int \frac{x^4 + 3x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$.

Solución

El integrando es una función racional impropia, por ello dividiremos y factorizaremos el denominador antes de hacer la descomposición en fracciones parciales :

$$\frac{x^4 + 3x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + 4x - 4} = x + 1 - \frac{x - 6}{(x^2 + 4)(x - 1)}$$

$$\frac{x - 6}{(x^2 + 4)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 1}$$

$$x - 6 = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 4)$$

$$x - 6 = (A + C)x^2 + (B - A)x + 4C - B$$

$$\text{Igualando los coeficientes: } \begin{cases} A + C = 0 \\ B - A = 1 \\ 4C - B = -6 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{matrix} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4 + 3x^2 - x + 2}{(x - 1)(x^2 + 4)} dx \\ &= \int \left[x + 1 - \frac{x + 2}{x^2 + 4} + \frac{1}{x - 1} \right] dx \\ &= \int x dx + \int dx - \int \frac{x + 2}{x^2 + 4} dx + \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \int x dx + \int dx - \int \frac{x dx}{x^2 + 4} - \int \frac{2 dx}{x^2 + 4} + \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln|x - 1| + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 140** Determine $\int \frac{2x^2 - x + 8}{(x - 1)(4x^2 - 8x + 13)} dx$.

Solución

El integrando es una función racional propia, el denominador esta factorizado pues $4x^2 - 8x + 13 = 0$ es un factor cuadrático irreducible, podemos descomponerlo en fracciones parciales.

$$\frac{2x^2 - x + 8}{(x - 1)(4x^2 - 8x + 13)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{4x^2 - 8x + 13}$$

$$2x^2 - x + 8 = A(4x^2 - 8x + 13) + (Bx + C)(x - 1).$$

Dando valores a x

$$\text{Si } x = 1 \quad \Rightarrow \quad 9 = 9A \quad \Rightarrow A = 1.$$

$$\text{Si } x = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 = 13 - C \quad \Rightarrow C = 5.$$

$$\text{Si } x = -1 \quad \Rightarrow \quad 11 = 25 + (5 - B)(-2) \quad \Rightarrow B = -2.$$

Integramos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^2 - x + 8}{(x-1)(4x^2 - 8x + 13)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x-5}{4x^2 - 8x + 13} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2x-5}{4x^2 - 8x + 13} dx \\ &= \ln|x-1| - \int \frac{\frac{2}{8}(8x-8) + 2-5}{4x^2 - 8x + 13} dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{4} \int \frac{8x-8}{4x^2 - 8x + 13} dx - \frac{3}{2} \int \frac{2}{(2x-2)^2 + 3^2} dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|4x^2 - 8x + 13| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2x-2}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 141** Determine $\int \frac{6x^2}{(x^6+1)(x^3+1)} dx$

Solución

Sea $x^3 = u$, entonces $3x^2 dx = du$, luego,

$$I = \int \frac{6x^2}{(x^6+1)(x^3+1)} dx = \int \frac{2du}{(u^2+1)(u+1)}$$

El integrando es una función racional propia cuyo denominador está factorizado por lo cual podemos descomponer en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{2}{(u^2+1)(u+1)} &= \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2+1} \\ 2 &= A(u^2+1) + (Bu+C)(u+1) \\ 2 &= (A+B)u^2 + (C+B)u + (A+C) \end{aligned}$$

$$\text{Igualando los coeficientes } \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=2 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{matrix}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{2du}{(u^2+1)(u+1)} &= \int \left[\frac{1}{u+1} - \frac{u-1}{u^2+1} \right] du \\ &= \int \frac{1}{u+1} du - \int \frac{u}{u^2+1} du + \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \ln|u+1| - \frac{1}{2} \ln|u^2+1| + \arctan u + C. \\ &= \ln|x^3+1| - \frac{1}{2} \ln|x^6+1| + \arctan(x^3) + C. \end{aligned}$$

■

Nota: En el ejemplo anterior y siempre que se pueda se recomienda introducir un cambio de variable para que la integral se vea más simple y nuestros cálculos sean mucho más sencillos.

6.4 Funciones racionales de senos y cosenos

Se quiere determinar $\int R(\sin x, \cos x) dx$, donde R es una función racional de $\sin x$ y $\cos x$, es decir:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)},$$

donde P y Q son funciones polinomiales que dependen de $\sin x$ y $\cos x$.

Por ejemplo:

Si

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \cos x},$$

entonces $P(\sin x, \cos x) = \cos x - \sin x$ y $Q(\sin x, \cos x) = 3 + \cos x$.

Caso 1:

Si R la función racional de $\sin x$ y $\cos x$, satisface:

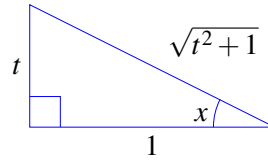
$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$$

Usamos la sustitución

$$t = \tan x$$

De donde:

$$\begin{aligned}x &= \arctan t \\dx &= \frac{dt}{1+t^2} \\ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} &= \operatorname{sen} x \\ \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} &= \cos x\end{aligned}$$



■ **Ejemplo 142** Determine $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2 x - 2} dx$

Solución

Como $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2 x - 2} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - 2}$ se tiene

$$\begin{aligned}R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) &= \frac{2(-\operatorname{sen} x)(-\cos x)}{(-\cos x)^2 - 2} \\ &= R(\operatorname{sen} x, \cos x).\end{aligned}$$

Aplicamos el caso 1, sea $t = \tan x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2 x - 2} dx &= 2 \int \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 2} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2 \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} - 2} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{t}{(1-2t^2-2)(1+t^2)} dt \\ &= - \int \frac{2t}{(2t^2+1)(1+t^2)} dt.\end{aligned}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{2t}{(2t^2+1)(1+t^2)} &= \frac{At+B}{2t^2+1} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \\ 2t &= (At+B)(1+t^2) + (Ct+D)(2t^2+1) \\ 2t &= (A+2C)t^3 + (B+2D)t^2 + (A+C)t + B+D\end{aligned}$$

$$\text{Igualando los coeficientes} \begin{cases} A+2C=0 \\ B+2D=0 \\ A+C=2 \\ B+D=0 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{aligned} A &= 4 \\ C &= -2 \\ B &= 0 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned}
 -\int \frac{2t}{(2t^2+1)(1+t^2)} dt &= -\int \left(\frac{4t}{2t^2+1} - \frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\
 &= -\ln(2t^2+1) + \ln(t^2+1) + C \\
 &= -\ln(2\tan^2 x + 1) + \ln(\tan^2 x + 1) + C.
 \end{aligned}$$

■

Si no se puede aplicar el caso 1, se puede aplicar:

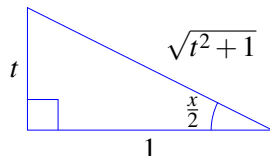
Caso 2: Caso general

Si R la función racional de $\sin x$ y $\cos x$, se aplica la sustitución

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

De donde:

$$\begin{aligned}
 x &= 2\arctan t \\
 dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \\
 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \sin\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
 \frac{2t}{t^2+1} &= \sin x \\
 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \cos\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
 \frac{1-t^2}{1+t^2} &= \cos x
 \end{aligned}$$



■ **Ejemplo 143** Determine $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{\cos x - \sin x + 1} dx$

Solución

Como $R(\sin x; \cos x) = \frac{\sin x - 2\cos x}{\cos x - \sin x + 1}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 R(-\sin x; -\cos x) &= \frac{-\sin x - 2(-\cos x)}{-\cos x - (-\sin x) + 1} = \frac{-\sin x + 2\cos x}{-\cos x + \sin x + 1} \\
 &\neq R(\sin x; \cos x)
 \end{aligned}$$

Aplicando el caso 2, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{sen} x - 2 \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x + 1} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 1} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= -2 \int \frac{t^2 + t - 1}{t^3 - t^2 + t - 1} dt = -2 \int \frac{t^2 + t - 1}{(t-1)(t^2+1)} dt \end{aligned}$$

Descomponiendo en fracciones parciales

$$\begin{aligned} I &= - \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{t+3}{t^2+1} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln(t^2+1) - 3 \arctan t - \ln|t-1| + C. \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right) - \frac{3}{2} x - \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

■

6.5 Ejercicios resueltos

■ **Ejemplo 144** Determine $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x \cos x - \cos x - \cos^2 x} dx$

Solución

Simplificando:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x \cos x - \cos x - \cos^2 x} dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x - \cos x - \cos^2 x} dx \\ &= 2 \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - 1 - \cos x} dx. \end{aligned}$$

Como $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - 1 - \cos x}$, se tiene

$$\begin{aligned} R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) &= \frac{-\operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x - 1 - (-\cos x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + 1 - \cos x} \\ &\neq R(\operatorname{sen} x, \cos x). \end{aligned}$$

Aplicamos el caso 2, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - 1 - \cos x} dx = 2 \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 4 \int \frac{t}{2t - t^2 - 1 - 1 + t^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{4t}{t-1} \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{4t}{(t-1)(1+t^2)} &= \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2) + (Bt+C)(t-1)}{(t-1)(1+t^2)} \\ 4t &= (A+B)t^2 + (-B+C)t + A-C,\end{aligned}$$

$$\text{Igualando coeficientes} \begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=4 \\ A-C=0 \end{cases} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{4t}{t-1} \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(\frac{2}{t-1} + \frac{-2t+2}{1+t^2} \right) dt \\ &= 2 \ln|t-1| - \ln|1+t^2| + 2 \arctan t + C \\ &= 2 \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| - \ln \left| 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \right| + x + C.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 145** Determine $\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{5+4\operatorname{sen}(3x)} dx$

Solución

Sea $t = 3x$, tenemos $dt = 3dx$, reemplazando

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{5+4\operatorname{sen}(t)} dt$$

Usando el caso 2, tenemos

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{5+4\operatorname{sen}(t)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{2z}{z^2+1}}{5+4\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)} \frac{2}{z^2+1} dz \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{4z}{(z^2+1)(8z+5z^2+5)} dz\end{aligned}$$

Descomponiendo en fracciones parciales

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1/2}{(z^2+1)} - \frac{5/2}{(5z^2+8z+5)} \right) dz \\
 &= \frac{1}{6} \arctan z - \frac{1}{6} \int \frac{1}{z^2 + \frac{8}{5}z + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1} dz \\
 &= \frac{1}{6} \arctan z - \frac{15}{63} \arctan \left(\frac{z+4/5}{3/5} \right) + C. \\
 &= \frac{1}{6} \arctan z - \frac{15}{63} \arctan \left(\frac{5z+4}{3} \right) + C. \\
 &= \frac{1}{6} \arctan(\tan(t/2)) - \frac{5}{18} \arctan \left(\frac{5 \tan(t/2) + 4}{3} \right) + C. \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{5}{18} \arctan \left(\frac{5}{3} \tan \left(\frac{3x}{2} \right) + \frac{4}{3} \right) + C.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 146** Determine $\int \frac{2 + \tan(x/2) + \cot(x/2)}{1 + \cos x} dx$.

Solución

Como $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, entonces

$$\tan(x/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \quad \text{y} \quad \cot(x/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

Luego para $R(\sin x, \cos x) = \frac{2 + \tan(x/2) + \cot(x/2)}{1 + \cos x} = \frac{2 + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \cos x}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 R(-\sin x, -\cos x) &= \frac{2 + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}}{1 - \cos x} \\
 &\neq R(\sin x, \cos x).
 \end{aligned}$$

Usando el caso 2, tenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2+t+1/t}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2+t+1/t}{\frac{2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int (2+t+1/t) dt \\
 &= 2t + \frac{t^2}{2} + \ln|t| + C = 2 \tan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{\tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{2} + \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 147** Determine $\int \frac{\cos x \sin x}{1 - \cos x} dx$.

Solución

Usando el caso 2, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int -\frac{2t^2 - 2}{t^5 + 2t^3 + t} dt \\ &= \int -\frac{2t^2 - 2}{t(t^2 + 1)^2} dt \end{aligned}$$

Descomponemos en fracciones parciales

$$\begin{aligned} -\frac{2t^2 - 2}{t(t^2 + 1)^2} &= \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1} + \frac{Dt + E}{(t^2 + 1)^2} \\ -2t^2 + 2 &= A(t^2 + 1)^2 + t(Bt + C)(t^2 + 1) + (Dt + E)t \\ -2t^2 + 2 &= (A + B)t^4 + Ct^3 + (2A + D + B)t^2 + (C + E)t + A \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} A + B = 0 & & A = 2 \\ C = 0 & & B = -2 \\ \text{De donde} \quad 2A + B + D = -2 & \text{obtenemos :} & C = 0 \\ C + E = 0 & & D = -4 \\ A = 2 & & E = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{2}{t} - \frac{2t}{t^2 + 1} - \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \right] dt \\ &= \int \frac{2}{t} dt - \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt - \int \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt \\ &= 2 \ln |t| - \ln |t^2 + 1| + \frac{2}{t^2 + 1} + C \\ &= 2 \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| - \ln \left| \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right| + \frac{2}{\tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 1} + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 148** Determine $\int \left(\frac{\cos x}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x} + \frac{1 + \tan x}{\cos^2 x + 1} \right) dx$

Solución

La integral se puede escribir como sigue:

$$I = \underbrace{\int \frac{\cos x}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{1 + \tan x}{\cos^2 x + 1} dx}_{I_2}.$$

a) Para I_1 usamos el caso 2, tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{\cos x}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x} dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
 &= \int \frac{1-t^2}{1+t^2 + 1-t^2 + 2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \int \frac{1-t}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt \\
 &= \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2}\right)) + C \\
 &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sec^2 \left(\frac{x}{2}\right)) + C_1.
 \end{aligned}$$

a) Para I_2 , usamos el caso 1, tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{1 + \tan x}{\cos^2 x + 1} dx = \int \frac{1+t}{\frac{1}{1+t^2} + 1} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t+1}{t^2+2} dt \\
 &= \int \frac{t}{t^2+2} dt + \int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{2})^2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C_2 \\
 &= \frac{1}{2} \ln(\tan^2 x + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C_2.
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$I = I_1 + I_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sec^2 \left(\frac{x}{2}\right)) + \frac{1}{2} \ln(\tan^2 x + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

■ **Ejemplo 149** Determine $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{(\cos x + 2) \cos x} dx$

Solución

En este caso, usamos el caso 2, tenemos:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{(\cos x + 2) \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\right) \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{(t^2 - 2t - 1) dt}{(t^2 + 3)(t^2 - 1)}.$$

Descomponemos en fracciones parciales

$$\begin{aligned}
 \frac{t^2 - 2t - 1}{(t^2 + 3)(t + 1)(t - 1)} &= \frac{At + B}{t^2 + 3} + \frac{C}{t + 1} + \frac{D}{t - 1} \\
 &= \frac{(At + B)(t^2 - 1) + C(t^2 + 3)(t - 1) + D(t^2 + 3)(t + 1)}{(t^2 + 3)(t + 1)(t - 1)} \\
 t^2 - 2t - 1 &= (At + B)(t^2 - 1) + C(t^2 + 3)(t - 1) + D(t^2 + 3)(t + 1).
 \end{aligned}$$

Dando valores a t

$$\text{Si } t = 1 \Rightarrow -2 = D(2)(4) \Rightarrow D = -1/4.$$

$$\text{Si } t = -1 \Rightarrow 2 = C(-2)(4) \Rightarrow C = -1/4.$$

$$\text{Si } t = 0 \Rightarrow -1 = B(-1) - \frac{1}{4}(-1)(3) - \frac{1}{4}(1)(3) \Rightarrow B = 1.$$

$$\text{Si } t = 2 \Rightarrow -1 = (2A+1)(3) - \frac{1}{4}(1)(7) - \frac{1}{4}(3)(7) \Rightarrow A = 1/2.$$

En la integral

$$I = 2 \int \frac{(t^2 - 2t - 1) dt}{(t^2 + 3)(t^2 - 1)}$$

Descomponemos en fracciones parciales

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \left(\frac{\frac{1}{2}t + 1}{t^2 + 3} + \frac{-1/4}{t + 1} + \frac{-1/4}{t - 1} \right) dt \\ &= \int \frac{t}{t^2 + 3} dt + 2 \int \frac{1}{t^2 + 3} dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2} \ln|t + 1| - \frac{1}{2} \ln|t - 1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 150** Determine $\int \frac{\cos x + 1}{\tan(x/2) + 2 \cot(x/2)} dx$

Solución

En este caso, usamos el caso 2, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}{t + \frac{1}{t}} \frac{2dt}{1+t^2} &= \int \frac{(1-t^2+1+t^2)t}{(1+t^2)^2} \frac{2dt}{1+t^2} = 4 \int \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= 2 \ln(1+t^2) + C = 2 \ln(1 + \tan^2(x/2)) + C \end{aligned}$$

■

6.6 Ejercicios propuestos

1. $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ Rpta. $\ln \left| \frac{e^x}{1+e^x} \right| + C$
2. $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} dx$ Rpta. $\ln |\tan x| + C$
3. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$ Rpta. $\frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C$
4. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$ Rpta. $x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$
5. $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx$ Rpta. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+2)^4} \right| + C$
6. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x-4)(x+3)} dx$ Rpta. $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C$
7. $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$ Rpta. $5x + \ln \left| \frac{x^{1/2}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}} \right| + C$
8. $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$
9. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$ Rpta. $\frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^8}{(2x-1)^7(2x+1)^9} \right| + C$
10. $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2} - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + C$
11. $\int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx$ Rpta. $\frac{30}{343} \ln \left| \frac{x-5}{x+2} \right| + \frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + C$
12. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$ Rpta. $x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| + C$
13. $\int \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^3} dx$ Rpta. $-\frac{1}{2(x^2 - 3x + 2)^2} + C$
14. $\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx$ Rpta. $x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C$
15. $\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$ Rpta. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} \right| + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$
16. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{10}} dx$ Rpta. $-\frac{1}{7(x-1)^7} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9} + C$
17. $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$ Rpta. $\ln |x-3| - \ln |x-2| + C$
18. $\int \frac{5-x}{2x^2 + x - 1} dx$ Rpta. $\frac{3}{2} \ln |2x-1| - 2 \ln |x+1| + C$
19. $\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 + x} dx$ Rpta. $\ln \left| \frac{x^3(x-1)^2}{x+3} \right| + C$
20. $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$ Rpta. $\ln \left| \frac{x^6}{x+1} \right| - \frac{9}{x+1} + C$

21. $\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{x} + \ln|x^4 + x^3| + C$
22. $\int \frac{3x}{x^2 - 6x + 9} dx$ Rpta. $3 \ln|x - 3| - \frac{9}{x-3} + C$
23. $\int \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$ Rpta. $\frac{1}{x+2} + \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$
24. $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$ Rpta. $\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \arctan x + C$
25. $\int \frac{x}{16x^4 - 1} dx$ Rpta. $\frac{1}{16} \ln\left|\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}\right| + C$
26. $\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{x^2(x^2 + 4)}{(x-1)^2}\right| + 2 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$
27. $\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} dx$ Rpta. $4 \ln|x^2 + 2| + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C$
28. $\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - x^2 + x + 3} dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2(x^2 + 2)} + C$
29. $\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx$ Rpta. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}}\right| + C$
30. $\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx$ Rpta. $\ln\left|\sqrt{\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}}\right| + C$
31. $\int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$ Rpta. $-\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$
32. $\int \frac{x^2 - 3x - 7}{(2x - 3)(x + 1)^2} dx$ Rpta. $\frac{3}{x+1} + \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + C$
33. $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

Introducción
 Cálculo de áreas
 La integral definida
 Interpretación geométrica de la integral definida
 Primer teorema fundamental del cálculo (1TFC)
 Segundo teorema fundamental del cálculo (2TFC)
 Propiedades de la integral definida
 Ejercicios resueltos
 Ejercicios propuestos

7. La integral definida

7.1 Introducción

Notación sigma

Se emplea para facilitar la representación de la suma de muchos términos

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(n), \quad m \leq n$$

donde

Σ : Sigma mayúscula del alfabeto griego, que corresponde a Σ
 i : índice de la suma

m : límite inferior de la suma

n : límite superior de la suma

$F(i)$: i -ésimo término de la suma

$n - (m - 1) = n - m + 1$: número de términos de la suma

Propiedades:

- $\sum_{i=1}^n c = cn, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=1}^n cF(i) = c \sum_{i=1}^n F(i), \quad c \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=1}^n [F(i) \pm G(i)] = \sum_{i=1}^n F(i) \pm \sum_{i=1}^n G(i)$
- $\sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0) \quad (\text{Primera Regla Telescópica})$

Fórmulas

1. $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}, \quad a \neq 1, a > 0$

■ **Ejemplo 151** Calcule el valor de $\sum_{i=1}^{20} [3i(i^2 + 2)]$

Solución

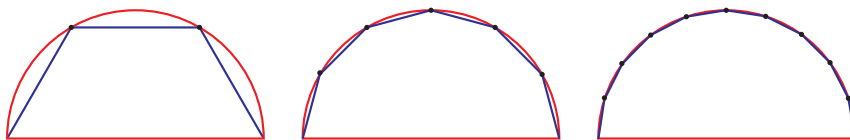
$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^{20} [3i(i^2 + 2)] = \sum_{i=1}^{20} [3i^3 + 6i] = 3 \sum_{i=1}^{20} i^3 + 6 \sum_{i=1}^{20} i \\
 &= 3 \left(\frac{(20)(20+1)}{2} \right)^2 + 6 \frac{(20)(20+1)}{2} \\
 &= 133560
 \end{aligned}$$

■

7.2 Cálculo de áreas

Hace más de 2000 años, los griegos intentaban resolver el problema de calcular el área mediante un procedimiento que llamaron **Método de Exhaución**. La descripción más clara de este método la hizo ARQUIMEDES.

Dada una región cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor y se continua el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región dada.



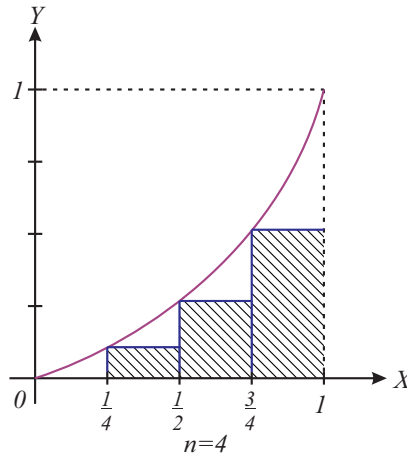
El concepto de área comienza con una comprensión intuitiva de cubrir una superficie con pequeños cuadrados, y se extiende a una definición matemática

general que abarca tanto fórmulas para figuras geométricas simples como técnicas de integración para áreas más complejas. Esta progresión desde la intuición hasta la formalidad permite aplicar el concepto de área en una amplia variedad de contextos en matemáticas, ciencias e ingeniería.

■ **Ejemplo 152** Dada la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = x^2$, se quiere determinar el área de la región R acotada por la gráfica de la función f , ver figura

Solución

i) Consideremos la región sombreada para 4 subintervalos



$$L_{(f)} < A \text{ y } 0 < A < 1$$

$$L_{(f)} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

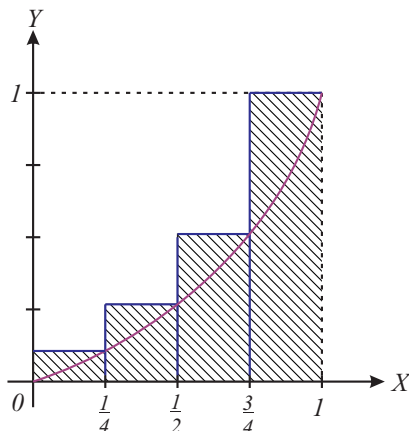
$$= \left(\frac{1}{4} - 0\right) f(0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) f\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) f\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{9}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} = \frac{14}{64}$$

$$L_{(f)} = \frac{7}{32} \quad (\text{Suma Inferior})$$

ii) Ahora consideramos



$$\begin{aligned}
 A &< U_{(f)} \\
 U_{(f)} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
 &= \left(\frac{1}{4} - 0\right) f\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{3}{4}\right) + \\
 &\quad \left(1 - \frac{3}{4}\right) f(1) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{9}{16}\right) + \frac{1}{4} (1) \\
 &= \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4} = \frac{30}{64} \\
 U_{(f)} &= \frac{15}{32} \quad (\text{Suma Superior})
 \end{aligned}$$

Es decir:

$$L_{(f)} < A < U_{(f)}$$

$$\frac{7}{32} < A < \frac{15}{32}$$

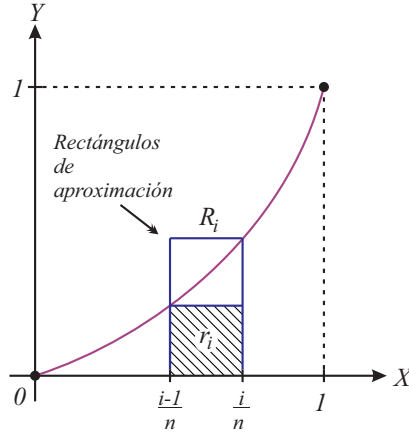
$$0,21875 < A < 0,46875$$

De manera similar se obtiene

Número de subintervalos n	$L_{(f)}$	$U_{(f)}$
10	0,28500	0,38500
50	0,32340	0,34340
100	0,32835	0,33835
1000	0,3328335	0,3338335

En esta tabla se observa que a medida que aumentamos el número de subintervalos n las sumas inferiores **crecen**, mientras que las sumas superiores **decrecen**, y de otro lado $L_{(f)} \leq A \leq U_{(f)}$

iii) Ahora subdividimos el intervalo $[0; 1]$ en n subintervalos



$$\begin{aligned}
 (a) \quad L_{(f)} &= \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) f\left(\frac{i-1}{n} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i^2 - 2i + 1}{n^2} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{i^2 - 2i + 1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{n^3} \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n+1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad U_{(f)} &= \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) f\left(\frac{i}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right) \frac{i^2}{n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

Como $L_{(f)} \leq A \leq U_{(f)}$

$$\text{entonces } \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \leq A \leq \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

Para calcular A , hacemos que $n \rightarrow +\infty$ y como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$

$$(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{(f)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{6}(1+0)(2+0) - 0 = \frac{1}{3}$$

$$(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{(f)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{6}(1+0)(2+0) = \frac{1}{3}$$

Entonces $\frac{1}{3} \leq A \leq \frac{1}{3}$, por lo tanto definimos el área de la región R por $\frac{1}{3} u^2$ ■

7.3 La integral definida

Definición 7.3.1 Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i -ésimo subintervalo. Si c_i es cualquier punto del i -ésimo subintervalo entonces la suma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

se denomina una **Suma de Riemann** de f para la partición Δ .

Cuando la norma de la partición tiende a cero entonces el número de subintervalos en una partición tiende a infinito, esto es $\|\Delta\| \rightarrow 0$ implica que $n \rightarrow +\infty$

Si el límite

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

existe para cualquier partición $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ y los puntos de muestra $c_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$ se dice que f es Riemann integrable en $[a, b]$ y se denota

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

en este caso el límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b .

Se tienen los elementos

a : límite inferior de integración.

b : límite superior de integración.

$f(x)$: función integrando

Nota:

- (*) El procedimiento de calcular una integral se denomina integración.
- (*) $\int_a^b f(x)dx$ también se denota por $\int_a^b f$, la variable de integración es muda

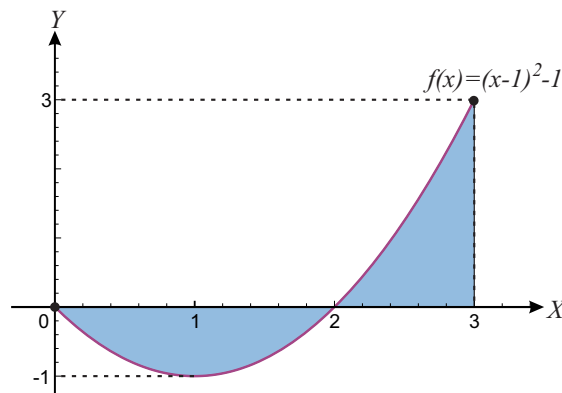
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f$$

Teorema 7.3.1 — La continuidad implica integrabilidad. Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta x$.

■ **Ejemplo 153** Usando sumas de Riemann calcule $\int_0^3 (x^2 - 2x)dx$.

Solución

1. La función f es integrable en $[0, 3]$ porque es continua en $[0, 3]$.
2. Definimos Δ , subdividiendo $[0, 3]$ en n subintervalos del mismo ancho

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$3. \ x_i = a + i\Delta x = 0 + \left(\frac{3}{n}\right)i = \frac{3i}{n}$$

4. Luego:

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (x^2 - 2x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{3i}{n} \right)^2 - 2 \left(\frac{3i}{n} \right) \right] \frac{3}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{18}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{27 n(n+1)(2n+1)}{n^3 \cdot 6} - \frac{18 n(n+1)}{n^2 \cdot 2} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - 9 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\
 &= \frac{9}{2}(2) - 9 = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_0^3 (x^2 - 2x) dx = 0$.

■

Nota: Esta integral no puede interpretarse como un área porque nuestra función f toma tanto valores positivos como negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 es el área que está sobre el eje X y A_2 es el área que está debajo del eje X ; en este caso en particular tenemos que $A_1 = A_2$.

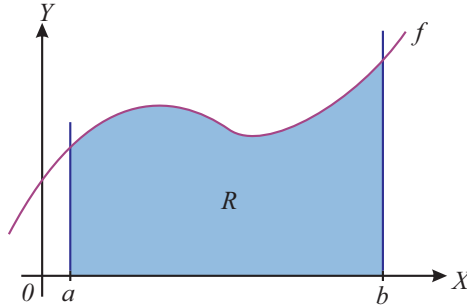
Definición 7.3.2 Una función f se llama **seccionalmente continua** sobre $[a, b]$, si f es continua en $[a, b]$ excepto en un número finito de puntos en $[a, b]$ y si en cada punto de discontinuidad los límites por la izquierda y por la derecha existen. En $x = a$ solamente se requiere que exista el límite por la derecha y en $x = b$ por la izquierda.

Teorema 7.3.2 Si f es **seccionalmente continua** sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

7.4 Interpretación geométrica de la integral definida

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a; b]$, entonces el área de la región R acotada por la gráfica de f , el eje X y las rectas verticales

$x = a$ y $x = b$ esta dado por $\text{Área}(R) = \int_a^b f(x)dx$.



Segundo teorema fundamental del cálculo (2TFC)

Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Demostración. .

1. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

y con longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

- 2.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \dots \dots (\alpha) \end{aligned}$$

3. Ahora F es continua (pues es diferenciable) y de acuerdo al TVM a F en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se sabe que existe un número c_i entre x_{i-1} y x_i , tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, entonces

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

De (α)

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{F(b) - F(a)}_{cte} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Se puede emplear

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

■

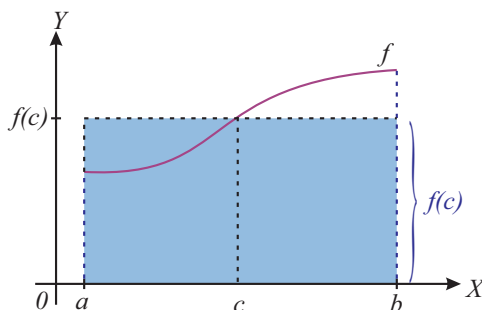
Nota: No es necesario emplear la constante de integración C , pues

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + C \Big|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Teorema del valor medio para integrales

Si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un número $c \in [a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



La demostración puede ser vista en [1], pág. 189.

■ **Ejemplo 154** Emplear el teorema del valor medio para integrales, verifique que

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} \leq \int_{-4}^1 \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx \leq 5$$

Solución

Del teorema tenemos que existe $c \in [-4, 1]$ tal que

$$\int_{-4}^1 \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx = \frac{1}{\sqrt{c+5}} [1 - (-4)] = \frac{5}{\sqrt{c+5}}$$

Como $c \in [-4, 1]$; $-4 \leq c \leq 1$; $1 \leq c+5 \leq 6$; $1 \leq \sqrt{c+5} \leq \sqrt{6}$;

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{c+5}} \geq \frac{\sqrt{6}}{6}; \quad 5 \geq \frac{5}{\sqrt{c+5}} \geq \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Al reemplazar la expresión del intervalo por la integral tenemos

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} \leq \int_{-4}^1 \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx \leq 5$$

■

7.5 Primer teorema fundamental del cálculo (1TFC)

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si para cada $x \in [a, b]$, f es continua en $[a, x]$ y existe $\int_a^x f(t)dt$. En consecuencia, definimos la función F por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Teorema 7.5.1 — Primer Teorema Fundamental del Cálculo (1TFC).

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si la función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

entonces F es diferenciable en $[a, b]$ y se cumple

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

(Si $x = a$ o b , entonces se entiende que $F'(x)$ significa la derivada por la derecha o por la izquierda de F .)

En términos generales, esta ecuación dice que si primero integramos f y luego derivamos el resultado, regresamos a la función original f .

Demostración. .

1. Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

2. Por definición de derivada

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right] \end{aligned}$$

3. Por el Teorema del Valor Medio para integrales, ($\Delta x > 0$)

Se sabe que existe un número $c \in [x; x + \Delta x]$ tal que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f(c)(x + \Delta x - x)] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \end{aligned}$$

y como $x \leq c \leq x + \Delta x$ y cuando $\Delta x \rightarrow 0$ implica $c \rightarrow x$ entonces

$$F'(x) = f(x)$$

■

■ **Ejemplo 155** Calcule $F'(x)$, para $x \in [3, 4]$, si $F(x) = \int_3^x (t^3 + \operatorname{sen} t - 4)dt$

Solución

La función f es continua en $[3, 4]$, luego aplicando el 1TFC

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_3^x (t^3 + \operatorname{sen} t - 4)dt \\ F'(x) &= x^3 + \operatorname{sen} x - 4 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 156** Calcule $F'(x)$, para $x \in [5, 6]$, si

$$F(x) = \int_x^5 (\operatorname{sen}(t^2 + 3) - 4\sqrt{2 + t^2})dt$$

Solución

La función f es continua $[5, 6]$, invertimos los límites de integración, luego aplicamos el 1TFC

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^5 (\sin(t^2 + 3) - 4\sqrt{2+t^2}) dt \\ &= - \int_5^x (\sin(t^2 + 3) - 4\sqrt{2+t^2}) dt \\ F'(x) &= -(\sin(x^2 + 3) - 4\sqrt{2+x^2}) \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 157** Calcule $F'(x)$, para $x \in [-4, -3]$, si $F(x) = \int_{-4}^x (e^{2x+t}) dt$

Solución

Primero sacamos e^{2x} del integrando pues no depende de la variable de integración

$$F(x) = e^{2x} \int_{-4}^x e^t dt$$

y derivamos como la derivada de un producto de funciones, teniendo en cuenta que al derivar la integral la función f es continua $[-4, -3]$, y por ello podemos aplicar el 1TFC

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{2x} \int_{-4}^x e^t dt \\ \frac{d}{dx} F(x) &= \frac{d}{dx} (e^{2x}) \int_{-4}^x e^t dt + e^{2x} \frac{d}{dx} \int_{-4}^x e^t dt \\ F'(x) &= 2e^{2x} \int_{-4}^x e^t dt + e^{2x} e^x \end{aligned}$$

Consecuencias del primer teorema fundamental del cálculo

- Si f es continua en $\mathbb{R}$ y g es diferenciable en $\mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right) = f[g(x)] g'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Si f es continua en $\mathbb{R}$, g y h diferenciables en $\mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f[g(x)] g'(x) - f[h(x)] h'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

esta es la **generalización del primer teorema fundamental del cálculo**.

■ **Ejemplo 158** Sea f una función continua en $\mathbb{R}$, halle $F'(x)$,

$$\text{si } F(x) = \int_{x^2+3}^{x^3-x} f(t) dt$$

Solución

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x^2+3}^{x^3-x} f(t) dt \\ F'(x) &= f(x^3-x)(x^3-x)' - f(x^2+3)(x^2+3)' \\ F'(x) &= f(x^3-x)(3x^2-1) - f(x^2+3)(2x) \end{aligned}$$

■

7.6 Segundo teorema fundamental del cálculo (2TFC)

Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Demostración. La prueba ya fue vista.

■

■ **Ejemplo 159** Calcule $\int_2^3 (x^2 + \text{sen}(x)) dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int_2^3 (x^2 + \text{sen}(x)) dx &= \left. \frac{x^3}{3} - \cos(x) \right|_2^3 \\ &= \frac{(3)^3}{3} - \cos(3) - \left(\frac{(2)^3}{3} - \cos(2) \right) \\ &= \frac{19}{3} - \cos(3) + \cos(2) \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 160** Calcule $F'(x)$, si $F(x) = \int_2^x e^{xt} dt$

Solución

en este caso no podemos sacar a la expresión que depende de x del integrando por ello primero aplicamos el 2TFC y luego derivamos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_2^x e^{\frac{t}{x}} dt = xe^{\frac{t}{x}} \Big|_2^x \\ &= xe - xe^{\frac{2}{x}} \\ F'(x) &= e - e^{\frac{2}{x}} + \frac{2e^{\frac{2}{x}}}{x} \end{aligned}$$

■

7.7 Propiedades de la integral definida

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, de manera implícita se supuso que $a < b$.

Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aún cuando $a > b$. Observe que si se invierte a y b , entonces $\Delta x = -\frac{b-a}{n}$.

Por tanto, convenimos

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Si $a = b$, convenimos

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Ahora presentamos algunas propiedades básicas de la integral definida que nos ayudarán a la evaluación de estas con mayor facilidad.

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$, y k una constante arbitraria, entonces:

1. $\int_a^b kdx = k(b-a)$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
partiendo de que f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$.
5. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

6. Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

7. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces para cualquier $c \neq 0$, se tiene que:

$$a) \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right) dx$$

$$b) \int_a^b f(x) dx = c \int_{a/c}^{b/c} f(cx) dx$$

Cambio de variable para integrales definidas

Teorema 7.7.1 Dadas las siguientes hipótesis:

1. $f(x)$ es continua en un intervalo J .
2. La función $x = x(u) = g(u)$ tiene una derivada continua en un intervalo E .
3. $\text{Rang}(g) = g(E) = \{x = g(u) / u \in E\} \subset J$
4. $a = x(\alpha) = g(\alpha)$, $b = x(\beta) = g(\beta)$; $\alpha, \beta \in E$, $a, b \in J$.

entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(u)]x'(u) du$$

Demostración. Puede ser vista en [7] pág. 168 ■

■ **Ejemplo 161** Evalúe $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

Solución

El integrando $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ es continua en $[3, 8]$.

Sea $x+1 = u^2$, es decir $x = x(u) = u^2 - 1$, entonces $x(u)$ tiene una derivada $x'(u) = 2u$ continua en $\mathbb{R}$ y su rango es $[0, +\infty)$; como

$a = 3 = x(2) = (2)^2 - 1$, implica $\alpha = 2$;

$b = 8 = x(3) = (3)^2 - 1$, implica $\beta = 3$

$$f[x(u)]x'(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2}} 2u = \frac{2u}{|u|}$$

La elección para el dominio de la variable u debe ser tal que

$$x = u^2 - 1 \rightarrow u = \sqrt{x+1} \quad \text{ó} \quad u = -\sqrt{x+1}$$

Primer caso: Si $u = \sqrt{x+1} \geq 0 \leftrightarrow x = u^2 - 1$; $x \in [3, 8]$, cambiando los límites de integración, si $x = 3$, tenemos $u = 2$ y cuando $x = 8$, tenemos $u = 3$

$$I = \int_2^3 \frac{2u}{|u|} du = \int_2^3 \frac{2u}{u} du = 2 \int_2^3 du = 2u \Big|_2^3 = 2(3-2) = 2$$

Segundo caso: Si $u = -\sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x = u^2 - 1$; $x \in [3, 8]$, cambiando los límites de integración, si $x = 3$, tenemos $u = -2$ y cuando $x = 8$, tenemos $u = -3$

$$I = \int_{-2}^{-3} \frac{2u}{|u|} du = \int_{-2}^{-3} \frac{2u}{-u} du = - \int_{-2}^{-3} 2 du = -2u \Big|_{-2}^{-3} = -2[(-3) - (-2)] = 2$$

Vemos que en cualquiera de los casos el resultado es el mismo. ■

Integrales de funciones simétricas

Suponga que f es una función continua en $[-a, a]$

1. Si f es una función **par**, es decir $f(-x) = f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

2. Si f es una función **impar**, es decir $f(-x) = -f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

■ **Ejemplo 162** Evalúe $\int_{-3}^3 [x^2 - x \cos x + 2^x] dx$

Solución

Sea

$$f(x) = x^2 - x \cos x + 2^x$$

la separamos en tres funciones

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)$$

donde $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x \cos x$ y $f_3(x) = 2^x$, analizando cada función

- $f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$, luego $f_1(x)$ es una función par.
- $f_2(-x) = (-x) \cos(-x) = -x \cos x = -f_2(x)$, luego $f_2(x)$ es una función impar.
- $f_3(-x) = 2^{-x} \neq f_3(x)$, luego $f_3(x)$ no es una función par ni impar

Luego:

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^3 f(x) dx &= \int_{-3}^3 [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)] dx \\
 &= \int_{-3}^3 f_1(x) dx - \int_{-3}^3 f_2(x) dx + \int_{-3}^3 f_3(x) dx \\
 &= 2 \int_0^3 x^2 dx - 0 + \int_{-3}^3 2^x dx \\
 &= 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 + \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{-3}^3 \\
 &= 18 + \frac{8}{\ln 2} - \frac{1}{8 \ln 2}
 \end{aligned}$$

■

Integración por partes para integrales definidas

Si f y g son funciones con derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

■ **Ejemplo 163** Evalúe $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

Solución

Sea

$$\begin{array}{ll}
 u = x & dv = \cos x \, dx \\
 du = dx & v = \operatorname{sen} x
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx &= x \operatorname{sen} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) - 0 \operatorname{sen} 0 + \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \cos 0 \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} - 0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1
 \end{aligned}$$

■

7.8 Ejercicios resueltos

■ **Ejemplo 164** Usando Sumas de Riemann, halle el valor de la constante b en

$$\int_0^b (x^2 + 2x) dx = 18$$

Solución

Tenemos $f(x) = x^2 + 2x$, $a = 0$, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{b}{n}$ y $x_i = a + \frac{bi}{n} = \frac{bi}{n}$. La función polinomial f es continua en $[0, b]$, luego la integral $\int_0^b (x^2 + 2x)dx$ es igual a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{bi}{n} \right)^2 + 2 \left(\frac{bi}{n} \right) \right) \frac{b}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{b^2}{n^2} i^2 + \frac{2b}{n} i \right] \frac{b}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{b^3}{n^3} i^2 + \frac{2b^2}{n^2} i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2b^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ 18 &= \left[\frac{b^3}{3} + b^2 \right] \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} b^3 + 3b^2 - 54 &= 0 \\ (b-3)(b^2 + 6b + 18) &= 0 \\ b &= 3. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 165** Usando sumas de Riemann, evalúe $\int_0^2 (x-1)(2-x)dx$.

Solución

Tenemos $f(x) = (x-1)(2-x) = -x^2 + 3x - 2$, considerando $a = 0$ y $b = 2$, se tiene $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ y $x_i = \frac{2i}{n}$. La función f es continua en $[0, 2]$, luego la integral

$\int_0^2 (-x^2 + 3x - 2)dx$ es igual a

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(-\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) - 2 \right) \frac{2}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[-\frac{4}{n^2} i^2 + \frac{6}{n} i - 2 \right] \frac{2}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[-\frac{8}{n^3} i^2 + \frac{12}{n^2} i - \frac{4}{n} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{12}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - 4 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + 6 \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 4 \right] \\
 &= -\frac{8}{3} + 6 - 4 = -\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 166** Usando sumas de Riemann, evalúe $\int_{-2}^0 (x^2 - e^{3+2x}) dx$.

Solución

Tenemos $f(x) = x^2 - e^{3+2x}$, considerando $a = -2$ y $b = 0$, se tiene $\Delta x = \frac{2}{n}$,

$x_i = -2 + \frac{2}{n}i$. Luego la integral $I = \int_{-2}^0 (x^2 - e^{3+2x}) dx$ es igual a

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{n^2} i^2 - \frac{8}{n} i + 4 - e^{-1+\frac{4}{n}i} \right) \frac{2}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{8}{n} - \frac{12}{e n} \sum_{i=1}^n \left(e^{\frac{4}{n}} \right)^i \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{16n(n+1)}{2n^2} + 8 \right] - \\
 &\quad \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{n} \cdot \frac{e^{\frac{4}{n}} \left(1 - \left(e^{\frac{4}{n}} \right)^n \right)}{1 - e^{\frac{4}{n}}} \right] \\
 &= \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{(1 - e^4)}{2e} \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{4}{n}}{1 - e^{\frac{4}{n}}} \right]}_{-\ln e = -1} \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{(1 - e^4)}{2e}.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 167** Usando sumas de Riemann, evalúe $\int_0^1 (2^x + x) dx$.

Solución

Tenemos $f(x) = 2^x + x$, considerando $a = 0$ y $b = 1$, se tiene

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$ y $x_i = \frac{i}{n}$. La función f es continua en $[0, 1]$, además $\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a(1-a^n)}{1-a}$.

Luego la integral $\int_0^1 (2^x + x) dx$ es igual a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(2^{i/n} + \frac{i}{n} \right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2^{1/n} (1 - (2^{1/n})^n)}{(1 - 2^{1/n}) n} + \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(-1) \frac{2^{1/n}}{(1 - 2^{1/n}) n} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= -1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2^{1/n}}{(1 - 2^{1/n}) n} \right] + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos el último límite : Sea $y = \frac{1}{n}$. Como $n \rightarrow +\infty$ tenemos $y \rightarrow 0$, así : $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2^{1/n}}{(1 - 2^{1/n}) n} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y 2^y}{1 - 2^y} \right] = \frac{0}{0}$. En este punto, aplicamos la Regla de L'Hospital:

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y 2^y)'}{(1 - 2^y)'} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^y + y 2^y \ln 2}{-2^y \ln 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + y \ln 2}{-\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2}$$

Por tanto $\int_0^1 (2^x + x) dx = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2}$. ■

■ **Ejemplo 168** Usando sumas de Riemann, calcular la siguiente integral

$$\int_{-2}^1 (1 - 2x)^2 dx$$

Solución

Tenemos $f(x) = (1 - 2x)^2$; $\Delta x_i = \frac{3}{n}$ y $x_i = -2 + \frac{3i}{n}$. Luego

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (1 - 2x)^2 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - 2 \left(-2 + \frac{3i}{n} \right) \right)^2 \frac{3}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{36}{n^2} i^2 - \frac{60}{n} i + 25 \right) \frac{3}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{108}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{180}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + 75 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - 90 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 75 \right] = 21. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 169** Usando sumas de Riemann, evalúe $\int_{-1}^1 (x^3 + e^{3x-2}) dx$, sabiendo que $\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a(1-a^n)}{1-a}$; $a > 0$; $a \neq 1$.

Solución

Tenemos $f(x) = x^3 + e^{3x-2}$, considerando $a = -1$ y $b = 1$, se tiene $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ y $x_i = -1 + \frac{2}{n}i$. La función f es continua $[-1, 1]$, luego la integral $\int_{-1}^1 (x^3 + e^{3x-2}) dx$ es igual a

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[(x_i)^3 + e^{3x_i-2} \right] \Delta x_i \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\left(-1 + \frac{2}{n}i \right)^3 + e^{3(-1+\frac{2}{n}i)-2} \right] \frac{2}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\left(-1 + \frac{2}{n}i \right)^3 \right] \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[e^{3(-1+\frac{2}{n}i)-2} \right] \frac{2}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(6\frac{i}{n} - \frac{12i^2}{n^2} + 8\frac{i^3}{n^3} - 1 \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[e^{-5} \cdot e^{\frac{6}{n}i} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left(\frac{6n(n+1)}{2} - \frac{12n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - n \right) + \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{-5}}{n} \frac{e^{6/n} (1 - (e^{6/n})^n)}{1 - e^{6/n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6(n+1)}{n} - 4 \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + 4 \frac{(n+1)^2}{n^2} - 2 \right) + \\
 &\quad 2e^{-5} (1 - e^6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{6/n}}{n(1 - e^{6/n})} \\
 &= (6 - 8 + 4 - 2) + 2e^{-5} (1 - e^6) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ye^{6y}}{1 - e^{6y}}; \text{ donde } y = \frac{1}{n} \\
 &= 2e^{-5} (1 - e^6) \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} e^{-5} (e^6 - 1).
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 170** Expresar el siguiente límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (2i)^2 2^{\left(\frac{i+4n}{n}\right)}$, como una integral definida en el intervalo $[0, 1]$

Solución

Del intervalo $a = 0$, $b = 1$, $\Delta x = \frac{1}{n}$, y $x_i = \frac{i}{n}$. Reescribiendo la sumatoria de forma adecuada:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (2i)^2 2^{\left(\frac{i+4n}{n}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(2i)^2}{n^2} 2^{\left(\frac{i}{n}+4\right)} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4 \left(\frac{i}{n}\right)^2 2^{\left(\frac{i}{n}+4\right)} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 4 (x_i)^2 2^{(x_i+4)} \Delta x \\ &= \int_0^1 4x^2 2^{x+4} dx.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 171** Sea $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{in^3}{(i+n)^5}$. Exprese M como una integral definida en el intervalo $[0, 1]$ y calcule su valor.

Solución

Del intervalo $a = 0$, $b = 1$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ y $x_i = \frac{i}{n}$. Reescribiendo la sumatoria de forma adecuada

$$\begin{aligned}M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{in^3}{(i+n)^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{in^3}{n^5}}{\frac{(i+n)^5}{n^5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i}{n}}{\frac{(i+n)^5}{n^5}} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i}{n}}{\left(\frac{i}{n}+1\right)^5} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(x_i+1)^5} \Delta x = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^5} dx.\end{aligned}$$

Integrando esta última integral. Sea $w = x + 1$, entonces $dw = dx$. Además, cuando $x = 0$ tenemos $w = 1$ y cuando $x = 1$ tenemos $w = 2$, reemplazando

$$\begin{aligned}M &= \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^5} dx = \int_1^2 \frac{w-1}{w^5} dw = \int_1^2 (w^{-4} - w^{-5}) dw \\ &= \left. \frac{w^{-3}}{-3} - \frac{w^{-4}}{-4} \right|_1^2 = \frac{11}{192}.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 172** Evaluar $\int_{-e}^e \left[\sin x \ln(x^2 + 1) + x \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + x^2 \right] dx$

Solución

Sea

$$f(x) = \operatorname{sen} x \ln(x^2 + 1) + x \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + x^2$$

la separamos en tres funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

donde

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x \ln(x^2 + 1), \quad f_2(x) = x \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad \text{y} \quad f_3(x) = x^2,$$

analizando cada función

- $f_1(-x) = \operatorname{sen}(-x) \ln((-x)^2 + 1) = -\operatorname{sen} x \ln(x^2 + 1) = -f_1(x)$, luego $f_1(x)$ es una función impar.
- $f_2(-x) = -x \arctan\left(\frac{1}{1+(-x)^2}\right) = -x \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -f_2(x)$, luego $f_2(x)$ es una función impar.
- $f_3(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_3(x)$, luego $f_3(x)$ es una función par.

Luego:

$$\begin{aligned} \int_{-e}^e f(x) dx &= \int_{-e}^e [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx \\ &= \underbrace{\int_{-e}^e f_1(x) dx}_{\text{función impar}} + \underbrace{\int_{-e}^e f_2(x) dx}_{\text{función impar}} + \underbrace{\int_{-e}^e f_3(x) dx}_{\text{función par}} \\ &= 0 + 0 + 2 \int_0^e x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^e = \frac{2e^3}{3}. \end{aligned}$$

- **Ejemplo 173** Calcule la integral $\int_{-a}^a [3x^5 \cos x + 2 \tan x + 2xe^{x^2}] dx$, donde $0 < a < \pi/2$.

Solución

Sea

$$f(x) = 3x^5 \cos x + 2 \tan x + 2xe^{x^2}$$

la separamos en tres funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

donde $f_1(x) = 3x^5 \cos x$, $f_2(x) = 2 \tan x$ y $f_3(x) = 2xe^{x^2}$,
analizando cada función tenemos:

- $f_1(-x) = 3(-x)^5 \cos(-x) = -3x^5 \cos x = -f_1(x)$, luego $f_1(x)$ es una función impar.
- $f_2(-x) = 2 \tan(-x) = \frac{2 \operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-2 \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -f_2(x)$, luego $f_2(x)$ es una función impar.
- $f_3(-x) = 2(-x)e^{(-x)^2} = -(2xe^{x^2}) = -f_3(x)$, luego $f_3(x)$ es una función impar.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx \\ &= \int_{-a}^a f_1(x) dx + \int_{-a}^a f_2(x) dx + \int_{-a}^a f_3(x) dx = 0. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 174** Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[-2, 6]$ tales que $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = -g(-x)$. Si

$$\int_0^6 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx = 6 \quad \text{y} \quad \int_0^{-2} g(x) dx + \int_2^4 g(x) dx = \int_{-2}^6 f(x) dx + 6$$

Hallar $\int_0^4 g(x) dx$.

Solución

$$\begin{aligned} \int_0^{-2} g(x) dx + \int_2^4 g(x) dx &= \int_{-2}^6 f(x) dx + 6 \\ -\int_{-2}^0 g(x) dx - \int_0^2 g(x) dx + \int_0^2 g(x) dx + \int_2^4 g(x) dx &= \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + 6 \\ \int_0^4 g(x) dx &= 2 \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + 6 \\ \int_0^4 g(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_0^6 f(x) dx + 6 \\ \int_0^4 g(x) dx &= 3 + 6 + 6 = 15. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 175** Sea f una función continua definida en el intervalo $[-4, 7]$.

Evaluar $\int_{-4}^4 f(x) dx$, si

$$\int_7^{-4} [f(x) + g(x)] dx = 5; \quad \int_4^7 2f(x) dx = \int_7^4 5g(x) dx = \frac{4}{5}; \quad g(-x) + g(x) = 0.$$

Solución

De $\int_7^{-4} [f(x) + g(x)] dx = 5$ tenemos

$$\begin{aligned}
 5 &= \int_7^{-4} [f(x) + g(x)] dx = \int_7^{-4} f(x) dx + \int_7^{-4} g(x) dx \\
 &= -\int_{-4}^7 f(x) dx - \int_{-4}^7 g(x) dx \\
 &= -\left(\int_{-4}^4 f(x) dx + \int_4^7 f(x) dx\right) - \int_{-4}^4 \underbrace{g(x)}_{\text{función impar}} dx - \int_4^7 g(x) dx \\
 &= -\int_{-4}^4 f(x) dx - \frac{2}{5} - 0 + \int_7^4 g(x) dx = -\int_{-4}^4 f(x) dx - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} \\
 &= -\int_{-4}^4 f(x) dx - \frac{6}{25} \\
 -\frac{131}{25} &= \int_{-4}^4 f(x) dx
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 176** Sean f y g dos funciones continuas sobre el intervalo $[-3, 4]$, tal que :

$$\int_{-3}^4 f(x) dx = 15, \quad \int_0^2 g(x) dx = 10, \quad \int_{-2}^2 g(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_3^1 f(x) dx,$$

f es una función impar y $g(-x) = g(x)$, para todo $x \in [-2, 2]$. Hallar $\int_0^4 f(x) dx$.

Solución

$$\int_{-3}^4 f(x) dx = 15 \Leftrightarrow \int_{-3}^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = 15 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 15 \dots\dots\dots (1)$$

Luego, como

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 g(x) dx + \int_0^1 f(x) dx &= \int_3^1 f(x) dx \\
 2 \int_0^2 g(x) dx &= -\int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx \\
 -2 \int_0^2 g(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = -20 \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

Sumando (1) y (2) :

$$\int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = -20 + 15 \Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = -5.$$

■

■ **Ejemplo 177** Usando las propiedades de la integral definida, calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sqrt{2+2\cos x} + \frac{\pi x}{\cos^2 x + 1} + xe^{-x^4} \right] dx$$

Solución

Sea

$$f(x) = \sqrt{2+2\cos x} + \frac{\pi x}{\cos^2 x + 1} + xe^{-x^4}$$

la separamos en tres funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

donde $f_1(x) = \sqrt{2+2\cos x}$, $f_2(x) = \frac{\pi x}{\cos^2 x + 1}$ y $f_3(x) = xe^{-x^4}$, analizando cada función tenemos:

- $f_1(-x) = \sqrt{2+2\cos(-x)} = \sqrt{2+2\cos x} = f_1(x)$, luego es una función par.
- $f_2(-x) = \frac{\pi(-x)}{\cos^2(-x) + 1} = -\frac{\pi x}{\cos^2 x + 1} = -f_2(x)$, luego es una función impar.
- $f_3(-x) = (-x)e^{-(-x)^4} = -xe^{-x^4} = -f_3(x)$, luego es una función impar.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f_3(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos x} dx + 0 + 0 \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = 4 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= 8 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 178** Usando las propiedades de la integral definida, calcule

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\sin^5(x^7) + x^3 \cos(x^3) + 2\cos(3x) \right] dx$$

Solución

Sea

$$f(x) = \operatorname{sen}^5(x^7) + x^3 \cos(x^3) + 2 \cos(3x)$$

la separamos en tres funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

donde $f_1(x) = \operatorname{sen}^5(x^7)$, $f_2(x) = x^3 \cos(x^3)$ y $f_3(x) = 2 \cos(3x)$, analizando cada función tenemos:

- $f_1(-x) = \operatorname{sen}^5((-x)^7) = -\operatorname{sen}^5(x^7) = -f_1(x)$, luego es una función impar.
- $f_2(-x) = (-x)^3 \cos((-x)^3) = -x^3 \cos(x^3) = -f_2(x)$, luego es una función impar.
- $f_3(-x) = 2 \cos(3(-x)) = 2 \cos(3x) = f_3(x)$, luego es una función par.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_1(x) dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_2(x) dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_3(x) dx \\ &= 0 + 0 + 4 \int_0^{\pi/4} \cos(3x) dx \\ &= \frac{4}{3} \operatorname{sen}(3x) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 179** Usando las propiedades de la integral definida y Sumas de Riemann calcule

$$\int_{-3}^3 [\operatorname{sen}(2x) + x^2 + xe^{x^2} + 1 + 2^x] dx.$$

Solución

Sea

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) + x^2 + 1 + xe^{x^2} + 2^x$$

la separamos en cuatro funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$$

donde $f_1(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $f_2(x) = x^2 + 1$, $f_3(x) = xe^{x^2}$, y $f_4(x) = 2^x$ analizando cada función tenemos:

- $f_1(-x) = \operatorname{sen}(2(-x)) = -\operatorname{sen}(2x) = -f_1(x)$, luego es una función impar.

- $f_2(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f_2(x)$, luego es una función par.
- $f_3(-x) = (-x)e^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -f_3(x)$, luego es una función impar.
- $f_4(-x) = 2^{-x}$, luego no es una función impar ni par.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^3 f(x) dx &= \int_{-3}^3 [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)] dx \\
 &= \int_{-3}^3 f_1(x) dx + \int_{-3}^3 f_2(x) dx + \int_{-3}^3 f_3(x) dx + \int_{-3}^3 f_4(x) dx \\
 &= 0 + 2 \int_0^3 [x^2 + 1] dx + 0 + \int_{-3}^3 2^x dx
 \end{aligned}$$

Luego

i) Sea $A = 2 \int_0^3 (x^2 + 1) dx$. Calculemos esta integral usando sumas de Riemann:

Tenemos $f(x) = x^2 + 1$, considerando $a = 0$ y $b = 3$, se tiene $\Delta x = \frac{3}{n}$; $x_i = \frac{3i}{n}$. La función f es continua en $[0, 3]$, luego

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{3i}{n} \right)^2 + 1 \right] \frac{3}{n} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right] = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{27 n(n+1)(2n+1)}{n^3 \cdot 6} + \frac{3}{n} n \right] \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[27 \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} + 3 \right] = (2) \left(\frac{27}{6} \right) (2) + 6 = 24.
 \end{aligned}$$

ii) Sea $B = \int_{-3}^3 2^x dx$. Calculemos esta integral usando sumas de Riemann:

Tenemos $f(x) = 2^x$, considerando $a = -3$ y $b = 3$, se tiene $\Delta x = \frac{6}{n}$,

$x_i = -3 + \frac{6i}{n}$. La función f es continua en $[-3, 3]$, luego

$$\begin{aligned}
 B &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 2^{(-3 + \frac{6i}{n})} \frac{6}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(6)2^{-3}}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{6i}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(6)2^{-3}}{n} 2^{\frac{6}{n}} \frac{2^{\frac{6n}{n}} - 1}{2^{\frac{6}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(6)2^{-3}}{n} 2^{\frac{6}{n}} \frac{2^6 - 1}{2^{\frac{6}{n}} - 1}.
 \end{aligned}$$

Haciendo $z = 6/n$. Cuando $n \rightarrow +\infty$, tenemos $z \rightarrow 0$. Así

$$\begin{aligned} B &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(6)2^{-3}}{n} 2^{\frac{6}{n}} \frac{2^6 - 1}{2^{\frac{6}{n}} - 1} = \frac{63}{8} \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{2^z}{2^z - 1} \\ &= \frac{63}{8} \left(\lim_{z \rightarrow 0} 2^z \right) \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2^z - 1} \right) = \frac{63}{8} (2^0) \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{(2^z - 1)'} \right) \quad (\text{por L' Hospital}) \\ &= \frac{63}{8} \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2^z \ln 2} \right) = \frac{63}{8} \left(\frac{1}{2^0 \ln 2} \right) = \frac{63}{8 \ln 2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I = A + B = 24 + \frac{63}{8 \ln 2}.$$

■

■ **Ejemplo 180** Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que

$f(1) = f'(1) = f''(1) = 1$. Calcule: $G''(1)$, si $G(x) = \int_{f(x)}^0 xf(t)dt$.

Solución

Como $G(x) = \int_{f(x)}^0 xf(t)dt = - \int_0^{f(x)} xf(t)dt = -x \int_0^{f(x)} f(t)dt$, derivando

$$G'(x) = - \int_0^{f(x)} f(t)dt - x \frac{d}{dx} \int_0^{f(x)} f(t)dt = - \int_0^{f(x)} f(t)dt - xf(f(x))f'(x).$$

Derivando otra vez

$$\begin{aligned} G''(x) &= - \frac{d}{dx} \int_0^{f(x)} f(t)dt - \frac{d}{dx} [xf(f(x))f'(x)] \\ &= -f(f(x))f'(x) - [f(f(x))f'(x) + xf'(f(x))f'(x)f'(x) + xf(f(x))f''(x)] \\ &= -2f(f(x))f'(x) - x[f'(f(x))(f'(x))^2 + f(f(x))f''(x)]. \end{aligned}$$

luego usando $f(1) = f'(1) = f''(1) = 1$, tenemos

$$G''(1) = -2f(1) - [f'(1) + f(1)] = -2 - 2 = -4.$$

■

■ **Ejemplo 181** Calcule $g'(0)$, si $g(x) = \int_{-3x+1}^1 \frac{1}{e^x + 1} (3t - 2e^{t^2-1}g'(t-1))dt$

Solución

Derivando y luego aplicando el 1TFC:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_{-3x+1}^1 \frac{1}{e^x+1} (3t - 2e^{t^2-1} g'(t-1)) dt \right]$$

antes de derivar todo lo que no depende de la variable t sale del integrando

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{e^x+1} \int_{-3x+1}^1 (3t - 2e^{t^2-1} g'(t-1)) dt \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x+1} \right) \int_{-3x+1}^1 (3t - 2e^{t^2-1} g'(t-1)) dt + \\ &\quad \left(\frac{1}{e^x+1} \right) \frac{d}{dx} \int_{-3x+1}^1 (3t - 2e^{t^2-1} g'(t-1)) dt \\ &= -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \int_{-3x+1}^1 (3t - 2e^{t^2-1} g'(t-1)) dt + \\ &\quad \left(\frac{1}{e^x+1} \right) \left[3(-3x+1) - 2e^{(-3x+1)^2-1} g'(-3x+1-1) \right] \frac{d}{dx}(-3x+1) \\ &= -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \int_{-3x+1}^1 (3t - 2e^{t^2-1} g'(t-1)) dt + \\ &\quad \left(\frac{1}{e^x+1} \right) \left[3(-3x+1) - 2e^{(-3x+1)^2-1} g'(-3x) \right] (-3). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} g'(0) &= -\frac{1}{4} \underbrace{\int_1^1 (3t - 2e^{t^2-1} g'(t-1)) dt}_{=0} - \frac{3}{2} [3 - 2g'(0)] \\ &= -\frac{1}{2} [3 - 2g'(0)] = \frac{9}{2} - 3g'(0) \\ g'(0) &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 182** Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}$, tal que: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ y $\int_0^1 f(w)dw = \frac{1}{4}$. Calcule $G'(1)$, si $G(x) = \int_0^{f(x)} xf(t)dt$.

Solución

Como $G(x) = \int_0^{f(x)} xf(t)dt = x \int_0^{f(x)} f(t)dt$, entonces:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx} \left[x \int_0^{f(x)} f(t)dt \right] = \frac{d}{dx}(x) \int_0^{f(x)} f(t)dt + x \frac{d}{dx} \int_0^{f(x)} f(t)dt \\ &= \int_0^{f(x)} f(t)dt + xf(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

Entonces evaluando $x = 1$ en $G'(x)$ tendremos

$$\begin{aligned} G'(1) &= \int_0^{f(1)} f(t) dt + 1f(f(1))f'(1) \\ &= \int_0^1 f(t) dt + f(1)(2) \\ &= \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 183** Sea f una función continua tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si se cumple la igualdad $\int_{x-1}^{x^2} f^2(t) dt = 5 + x^3 - 6x$, calcule $f(-2)$ sabiendo que $f(1) = 1$.

Solución

Derivando ambos lados de la igualdad anterior se tiene:

$$\frac{d}{dx} \int_{x-1}^{x^2} f^2(t) dt = 3x^2 - 6.$$

Aplicando el 1TFC a la primera igualdad se llega

$$\begin{aligned} f^2(x^2) \frac{d}{dx}(x^2) - f^2(x-1) \frac{d}{dx}(x-1) &= 3x^2 - 6 \\ f^2(x^2) 2x - f^2(x-1) &= 3x^2 - 6. \end{aligned}$$

Para hallar $f(-2)$ se hace $x^2 = -2$ (esto es un absurdo) o $x-1 = -2$, despejando $x = -1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f^2((-1)^2) 2(-1) - f^2(-2) &= 3(-1)^2 - 6 \\ -2f^2(1) - f^2(-2) &= -3 \\ f(-2) &= \sqrt{3 - 2f^2(1)} = 1. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 184** Hallar $H'(0)$, si $H(x) = \int_{-2x}^{2x} (\sin(t^3x) + (x-1)e^{2t^2}) dt$

Solución

Sea $f(t) = \sin(t^3x)$, es una función impar.

Mientras que $g(t) = (x-1)e^{2t^2}$ es una función par. Así

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{-2x}^{2x} \sin(t^3x) dt + \int_{-2x}^{2x} (x-1)e^{2t^2} dt \\ &= 0 + 2 \int_0^{2x} (x-1)e^{2t^2} dt = 2(x-1) \int_0^{2x} e^{2t^2} dt. \end{aligned}$$

Derivando

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2 \int_0^{2x} e^{2t^2} dt + 2(x-1) \frac{d}{dx} \int_0^{2x} e^{2t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{2x} e^{2t^2} dt + 2(x-1) e^{2(2x)^2} 2 = 2 \int_0^{2x} e^{2t^2} dt + 4(x-1) e^{8x^2}. \end{aligned}$$

Reemplazando

$$H'(0) = 2 \int_0^0 e^{2t^2} dt + 4(0-1) e^0 = 0 - 4 = -4.$$

■ **Ejemplo 185** Si $\int_{(x+1)\tan x}^{-7} f(t+8) dt = \sqrt{x^3} + x^3 - x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ calcular $f(8)$.

Solución

Derivando la relación anterior se tiene:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{(x+1)\tan x}^{-7} f(t+8) dt \right) = \frac{3}{2} \sqrt{x} + 3x^2 - 1.$$

Aplicando el 1 T.F.C

$$\begin{aligned} -f((x+1)\tan x + 8) \frac{d}{dx} [(x+1)\tan x] &= \frac{3}{2} \sqrt{x} + 3x^2 - 1 \\ -f((x+1)\tan x + 8) [(x+1)\sec^2 x + \tan x] &= \frac{3}{2} \sqrt{x} + 3x^2 - 1. \end{aligned}$$

Para $f(8)$, hallamos el valor de x

$$\begin{aligned} (x+1)\tan x + 8 &= 8 \\ (x+1)\tan x &= 0 \text{ tenemos } x = -1 \text{ ó } \tan x = 0. \end{aligned}$$

Descartamos $x = -1 \notin [0, \frac{\pi}{4}]$ y queda $\tan x = 0$, tenemos $x = 0$.

Reemplazando

$$-f(8) [\sec^2 0 + \tan 0] = -1 \text{ tenemos } f(8) = 1.$$

■ **Ejemplo 186** Si $\int_0^{(1+\sqrt{x})} f(t-1) dt = 3x + 4$, calcule la siguiente integral

$$\int_1^2 \frac{f(z)}{\sqrt{4z^2 - 1}} dz.$$

Solución

Aplicando el 1TFC a

$$\begin{aligned}\int_0^{(1+\sqrt{x})} f(t-1) dt &= 3x+4 \\ \frac{d}{dx} \left(\int_0^{(1+\sqrt{x})} f(t-1) dt \right) &= \frac{d}{dx} (3x+4) \\ f(1+\sqrt{x}-1) \frac{1}{2\sqrt{x}} &= 3 \\ f(\sqrt{x}) &= 6\sqrt{x}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}I &= \int_1^2 \frac{f(z)}{\sqrt{4z^2-1}} dz = \int_1^2 \frac{6z}{\sqrt{4z^2-1}} dz = \frac{3}{2} \sqrt{4z^2-1} \Big|_1^2 \\ &= \frac{3}{2} (\sqrt{15} - \sqrt{3})\end{aligned}$$

■

■ Ejemplo 187 Dadas las funciones

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta x+5} f(t) dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_{-x}^c (t^2 + 5t^{2/3} \cos(t\pi)) dt.$$

Calcule $f(3)$, cuando $F(x)$ y $G(x)$ son tangentes en el punto $(1, b)$

Solución

Como las gráficas de las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son tangentes, entonces tenemos que por el punto $(1, b)$ pasa la recta tangente a ambas gráficas, cuya pendiente es $m = F'(1) = G'(1)$.

Calculamos $F'(x)$ y $G'(x)$, usando el 1TFC:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta x+5} f(t) dt, \text{ tenemos } F'(x) = f(\beta x+5)\beta$$

$$G(x) = \int_{-x}^c (t^2 + 5t^{2/3} \cos(t\pi)) dt$$

$$G'(x) = -(x^2 + 5x^{2/3} \cos(-x\pi))(-1)$$

$$\text{Luego : } F'(1) = G'(1) \Leftrightarrow f(\beta+5)\beta = (1+5\cos\pi) \Leftrightarrow f(\beta+5)\beta = -4$$

Ahora, para obtener el valor de $f(3)$ se debe cumplir que

$$\beta = -2. \quad \text{Así } f(-2+5)(-2) = -4 \Rightarrow f(3) = 2.$$

■

■ **Ejemplo 188** Calcule $\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x \left(t^3 \cos t^2 + \frac{t^3}{t^4+1} + \cos^2(2t) \right) dt \right] dx$

Solución

Aplicando el 1TFC para resolver:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \left(t^3 \cos t^2 + \frac{t^3}{t^4+1} + \cos^2(2t) \right) dt = x^3 \cos x^2 + \frac{x^3}{x^4+1} + \cos^2(2x),$$

luego el problema queda :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left[x^3 \cos x^2 + \frac{x^3}{x^4+1} + \cos^2(2x) \right] dx \\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} x^3 \cos x^2 dx + \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{x^3}{x^4+1} dx + \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos^2(2x) dx \end{aligned}$$

Analizamos cada uno de los integrandos :

$$f(x) = x^3 \cos x^2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 \cos (-x)^2 = -x^3 \cos x^2 \Rightarrow f(x) \text{ es impar}$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^4+1} \Rightarrow g(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^4+1} = -\frac{x^3}{x^4+1} \Rightarrow g(x) \text{ es impar}$$

$$h(x) = \cos^2(2x) \Rightarrow h(-x) = \cos^2(2(-x)) = \cos^2(2x) \Rightarrow h(x) \text{ es par}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} I &= 0 + 0 + 2 \int_0^{\pi/8} \cos^2(2x) dx \\ &= \int_0^{\pi/8} [1 + \cos(4x)] dx = x + \frac{1}{4} \sin(4x) \Big|_0^{\pi/8} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 189** Si $f(x) = \int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} (x+1) e^{x+t} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$, calcule $f'(1)$.

Solución

Como

$$f(x) = \int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} (x+1) e^{x+t} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt = \int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} (x+1) e^x e^t \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [(x+1) e^x] \int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} e^t \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt +$$

$$(x+1) e^x \frac{d}{dx} \left[\int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} e^t \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt \right]$$

Al segundo término aplicamos el ITFC

$$= [e^x + (x+1) e^x] \int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} e^t \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt +$$

$$(x+1) e^x \left[e^{2+\ln x} \sin\left(\frac{\pi(2+\ln x)}{4}\right) \frac{d}{dx} (2+\ln x) - \right.$$

$$\left. e^{\sqrt{3x^2+1}} \sin\left(\frac{\pi(\sqrt{3x^2+1})}{4}\right) \frac{d}{dx} (\sqrt{3x^2+1}) \right]$$

$$= [e^x + (x+1) e^x] \int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} e^t \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt +$$

$$(x+1) e^x \left[e^{2+\ln x} \sin\left(\frac{\pi(2+\ln x)}{4}\right) \left(\frac{1}{x}\right) - \right.$$

$$\left. e^{\sqrt{3x^2+1}} \sin\left(\frac{\pi\sqrt{3x^2+1}}{4}\right) \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \right].$$

Luego

$$f'(1) = 3e \underbrace{\int_2^2 e^t \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt}_{=0} + 2e \left[e^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{3}{2} \right]$$

$$= 2e \left[e^2 - e^2 \frac{3}{2} \right] = -e^3.$$

■

■ **Ejemplo 190** Si $G(x) = \int_2^{x^2} x^2 f(t) dt$, $f(2) = \frac{1}{2}$ y $f'(2) = 0$, hallar $G''(\sqrt{2})$.

Solución

Antes de derivar sacamos del integrando x^2 , luego aplicamos el 1TFC

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x^2 \int_2^{x^2} f(t) dt \right) = 2x \int_2^{x^2} f(t) dt + x^2 \frac{d}{dx} \int_2^{x^2} f(t) dt \\ &= 2x \int_2^{x^2} f(t) dt + 2x^3 f(x^2) = 2x \int_2^{x^2} f(t) dt + x^2 f(x^2) (2x) \\ &= 2x \int_2^{x^2} f(t) dt + 2x^3 f(x^2). \end{aligned}$$

Nuevamente aplicando 1TFC

$$\begin{aligned} G''(x) &= 2 \int_2^{x^2} f(t) dt + 2x \frac{d}{dx} \int_2^{x^2} f(t) dt + 6x^2 f(x^2) + 2x^3 f'(x^2) (2x) \\ &= 2 \int_2^{x^2} f(t) dt + 2x f(x^2) (2x) + 6x^2 f(x^2) + 4x^4 f'(x^2) \\ &= 2 \int_2^{x^2} f(t) dt + 4x^2 f(x^2) + 6x^2 f(x^2) + 4x^4 f'(x^2). \end{aligned}$$

Evaluable $x = \sqrt{2}$ se tiene

$$G''(\sqrt{2}) = 2 \int_2^2 f(t) dt + 8f(2) + 12f(2) + 16f'(2) = 4 + 6.$$

Por lo tanto $G''(\sqrt{2}) = 10$. ■

■ **Ejemplo 191** Calcule $I = \int_2^4 \frac{|x-1|+3}{|x-3|+1} dx$.

Solución

Observemos que $|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x \geq 1 \\ -x+1 & , \quad x < 1 \end{cases}$ y $|x-3| = \begin{cases} x-3 & , \quad x \geq 3 \\ -x+3 & , \quad x < 3 \end{cases}$

Luego $|x-1| = x-1$, para todo $x \in [2, 4]$; mientras que $|x-3| = \begin{cases} x-3 & , \quad x \in [3, 4] \\ -x+3 & , \quad x \in [2, 3] \end{cases}$.

Así

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^4 \frac{|x-1|+3}{|x-3|+1} dx = \int_2^3 \frac{x+2}{-x+4} dx + \int_3^4 \frac{x+2}{x-2} dx \\
 &= -\int_2^3 \frac{x-4+6}{x-4} dx + \int_3^4 \frac{x-2+4}{x-2} dx \\
 &= -\int_2^3 dx - 6 \int_2^3 \frac{1}{x-4} dx + \int_3^4 dx + 4 \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx \\
 &= -x \Big|_2^3 - 6 \ln|x-4| \Big|_2^3 + x \Big|_3^4 + 4 \ln|x-2| \Big|_3^4 \\
 &= -(3-2) - 6(\ln 1 - \ln 2) + (4-3) + 4(\ln 2 - \ln 1) \\
 &= 10 \ln 2.
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 192** Calcule $\int_0^1 \frac{x^4+2x^2+x+3}{(x^2+1)^2} dx$.

Solución

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{x^4+2x^2+x+3}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)^2+x+2}{(x^2+1)^2} dx \\
 &= \underbrace{\int_0^1 dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx}_{I_2} + \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{(x^2+1)^2} dx}_{I_3}
 \end{aligned}$$

$$I_1 = x \Big|_0^1 = 1$$

$$I_2 = -\frac{1}{2(x^2+1)} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Para I_3 utilizamos sustitución trigonométrica:

$$x = \tan \theta; \quad dx = \sec^2 \theta d\theta; \quad (\sqrt{x^2+1})^4 = (\sec \theta)^4$$

$$I_3 = 2 \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} = 2 \int \cos^2 \theta d\theta = \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \theta + \frac{\sin 2\theta}{2}$$

Volviendo a la variable x y evaluando

$$I_3 = \arctan x + \frac{x}{x^2+1} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}.$$

■

■ **Ejemplo 193** Calcule $\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{x}) \, dx$.

Solución

Sea $t = \sqrt{x}$, tenemos $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, así

$$\int \operatorname{sen}(\sqrt{x}) \, dx = 2 \int t \operatorname{sen} t \, dt$$

Ahora integrando por partes se tiene:

$$\begin{array}{ll} u = t & dv = \operatorname{sen} t \, dt \\ du = dt & v = -\cos t \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \left(-t \cos t + \int \cos t \, dt \right) = -2t \cos t + 2 \operatorname{sen} t + C. \\ &= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Ahora aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{x}) \, dx &= \left[2(-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \operatorname{sen} \sqrt{x}) \right] \Big|_{x=0}^{x=\pi^2/4} \\ &= 2(-\pi/2 \cos \pi/2 + \operatorname{sen} \pi/2) - 2(0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 194** Evalúe $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[2xe^{x^2} \cos x - \sec^4 x \tan^{2/3} x - \frac{4}{\pi} \right] dx$.

Solución

Sea

$$f(x) = 2xe^{x^2} \cos x - \sec^4 x \tan^{2/3} x - \frac{4}{\pi}$$

la separamos en tres funciones

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) - f_3(x)$$

donde $f_1(x) = 2xe^{x^2} \cos x$, $f_2(x) = \sec^4 x \tan^{2/3} x$ y $f_3(x) = \frac{4}{\pi}$, analizando cada función tenemos:

■ $f_1(-x) = 2(-x)e^{(-x)^2} \cos(-x) = -2xe^{x^2} \cos x = -f_1(x)$, luego es una función impar.

- $f_2(-x) = \sec^4(-x) \tan^{2/3}(-x) = \sec^4 x \tan^{2/3} x = f_2(x)$, luego es una función par.
- $f_3(-x) = \frac{4}{\pi} = f_3(x)$, luego es una función par.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_1(x) dx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_2(x) dx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_3(x) dx \\
 &= 0 - 2 \int_0^{\pi/4} \sec^4 x \tan^{2/3} x dx - \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} dx \\
 &= -2 \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \tan^{2/3} x dx - 2 \\
 &= -2 \left[\int_0^{\pi/4} \tan^{2/3} x \sec^2 x dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{8/3} x \sec^2 x dx \right] - 2 \\
 &= -2 \left[\frac{3}{5} \tan^{5/3} x + \frac{3}{11} \tan^{11/3} x \right] \Big|_0^{\pi/4} - 2 = -2 \left[\frac{3}{5} + \frac{3}{11} \right] - 2 \\
 &= -\frac{206}{55}.
 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 195** Usando propiedades de la integral definida y el segundo teorema fundamental del cálculo, evaluar la siguiente integral

$$I = \int_{-2}^2 \left(x(1 + 4^{x^2}) + 3x^2|x^2 - 4| + \frac{x^7}{\ln(x^2 + 1)} \right) dx.$$

Solución

Como $-2 \leq x \leq 2$, tenemos $-4 \leq x^2 - 4 \leq 0$, así $|x^2 - 4| = 4 - x^2$; luego

$$f(x) = x(1 + 4^{x^2}) + 3x^2(4 - x^2) + \frac{x^7}{\ln(x^2 + 1)}$$

la separamos en tres funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

donde $f_1(x) = x(1 + 4^{x^2})$, $f_2(x) = 3x^2(4 - x^2)$ y $f_3(x) = \frac{x^7}{\ln(x^2 + 1)}$, analizando cada función tenemos:

- $f_1(-x) = (-x)(1 + 4^{(-x)^2}) = -x(1 + 4^{x^2}) = -f_1(x)$, luego es una función impar.
- $f_2(-x) = 3(-x)^2(4 - (-x)^2) = 3x^2(4 - x^2) = f_2(x)$, luego es una función par.

- $f_3(-x) = \frac{(-x)^7}{\ln((-x)^2 + 1)} = -\frac{x^7}{\ln(x^2 + 1)} = -f_3(x)$, luego es una función impar.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 f_1(x) dx + \int_{-2}^2 f_2(x) dx + \int_{-2}^2 f_3(x) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 3x^2 (4 - x^2) dx + 0 \\ &= 2 \int_0^2 (12x^2 - 3x^4) dx = 2 \left[4x^3 - \frac{3}{5}x^5 \right]_0^2 = \frac{128}{5}.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 196** Usando propiedades de la integral definida y el segundo teorema fundamental del cálculo, evalúe la integral

$$I = \int_{-1}^1 \left(x e^{x^2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + 3|x^2 - 2| - 2x \cos(\pi x) \right) dx.$$

Solución

Como $-1 \leq x \leq 1$, tenemos $-2 \leq x^2 - 2 \leq -1$, así $|x^2 - 2| = -(x^2 - 2)$, luego

$$f(x) = x e^{x^2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + 3(2 - x^2) - 2x \cos(\pi x)$$

la separamos en cuatro funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - f_4(x)$$

donde $f_1(x) = x e^{x^2}$, $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ y $f_3(x) = 3(2 - x^2)$, $f_4(x) = 2x \cos(\pi x)$

analizando cada función tenemos:

- $f_1(-x) = (-x)e^{(-x)^2} = -x e^{x^2} = -f_1(x)$, luego es una función impar.
- $f_2(-x) = \frac{(-x)}{\sqrt{4-(-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -f_2(x)$, luego es una función impar.
- $f_3(-x) = 3(2 - (-x)^2) = 3(2 - x^2) = f_3(x)$, luego es una función par.
- $f_4(-x) = 2(-x) \cos(\pi(-x)) = -2x \cos(\pi x) = -f_4(x)$, luego es una función impar.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f_1(x) dx + \int_{-1}^1 f_2(x) dx + \int_{-1}^1 f_3(x) dx - \int_{-1}^1 f_4(x) dx \\ &= 0 + 0 + 2 \int_0^1 3(2 - x^2) dx - 0 \\ &= 12x - 2x^3 \Big|_0^1 = 10.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 197** Evaluar $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Solución

Sea $u = \frac{1}{x}$, tenemos $du = -\frac{1}{x^2} dx$.

Cuando $x = \frac{1}{\pi}$, tenemos $u = \pi$, y si $x = \frac{2}{\pi}$, tenemos $u = \frac{\pi}{2}$

Luego en la integral

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx = - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} u du \\ &= \cos u \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi = 0 - (-1) = 1. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 198** Calcule $\left[\int_{-e}^e x^2 \ln(x^2 + 1) + \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] dx$.

Solución

Usando propiedades:

$$\begin{aligned} I &= \left[\int_{-e}^e x^2 \ln(x^2 + 1) + \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] dx = \int_{-e}^e \underbrace{x^2 \ln(x^2 + 1)}_{\text{función par}} dx + \int_{-e}^e \underbrace{\frac{x^3}{x^2 + 1}}_{\text{función impar}} dx \\ &= 2 \int_0^e x^2 \ln(x^2 + 1) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} u &= \ln(x^2 + 1) & dv &= x^2 dx \\ du &= \frac{2x}{x^2 + 1} dx & v &= \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^e x^2 \ln(x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^e - \frac{2}{3} \int_0^e \frac{x^4}{x^2 + 1} dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^e - \frac{2}{3} \int_0^e \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^e - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) \Big|_0^e \right] \\ &= 2 \left[\frac{e^3}{3} \ln(e^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{e^3}{3} - e + \arctan e \right) \right]. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 199** Calcule $\int_4^8 \left(\sqrt{|4-x|+x} + \frac{x}{\sqrt{x}-1} \right) dx$

Solución

Observe que $|4-x| = \begin{cases} 4-x & , \quad x < 4 \\ x-4 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$, luego en la integral:

$$\begin{aligned} \int_4^8 \left(\sqrt{|4-x|+x} + \frac{x}{\sqrt{x}-1} \right) dx &= \int_4^8 \left(\sqrt{2x-4} + \frac{x}{\sqrt{x}-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} (2x-4)^{3/2} \Big|_4^8 + \int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x}-1} dx \\ &= \frac{1}{3} [24\sqrt{3}-8] + \underbrace{\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x}-1} dx}_{I_1} \end{aligned}$$

Sea $u^2 = x$, tenemos $2udu = dx$. Cuando $x = 4$, tenemos $u = 2$ y si $x = 8$, tenemos $u = 2\sqrt{2}$. Reemplazando en la integral I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x}-1} dx = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{u^2}{u-1} (2udu) = 2 \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{u^3}{u-1} du \\ &= 2 \int_2^{2\sqrt{2}} \left[u^2 + u + 1 + \frac{1}{u-1} \right] du = 2 \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln|u-1| \right] \Big|_2^{2\sqrt{2}} \\ &= 2 \left[\left(\frac{16}{3}\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + \ln|2\sqrt{2}-1| \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2 + \ln 1 \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{22}{3}\sqrt{2} + \ln|2\sqrt{2}-1| - \frac{8}{3} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_4^8 \left(\sqrt{|4-x|+x} + \frac{x}{\sqrt{x}-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} [24\sqrt{3}-8] + 2 \left[\frac{22}{3}\sqrt{2} + \ln|2\sqrt{2}-1| - \frac{8}{3} \right] \\ &= 8\sqrt{3} + \frac{44}{3}\sqrt{2} + 2\ln|2\sqrt{2}-1| - 8. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 200** Calcule $\int_1^2 \frac{e^{3\ln x + \frac{2}{x}}}{x^5} dx$.

Solución

$$I = \int_1^2 \frac{e^{3\ln x + \frac{2}{x}}}{x^5} dx = \int_1^2 \frac{e^{\ln x^3} e^{2/x}}{x^5} dx = \int_1^2 \frac{x^3 e^{2/x}}{x^5} dx = \int_1^2 e^{2/x} \frac{1}{x^2} dx$$

Sea $u = \frac{2}{x}$, tenemos $du = -\frac{2}{x^2} dx$. Cuando $x = 1$, tenemos $u = 2$ y si $x = 2$, tenemos $u = 1$. Luego

$$I = -\frac{1}{2} \int_2^1 e^u du = \frac{1}{2} \int_1^2 e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_1^2 = \frac{1}{2} e(e-1)$$

■

■ **Ejemplo 201** Calcule $\int_{\frac{1}{e}}^e \operatorname{sen}(\ln x) dx$.

Solución

Integrando por partes tenemos

$$\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}(\ln x) & dv = dx \\ du = \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx & v = x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e \operatorname{sen}(\ln x) dx &= x \operatorname{sen}(\ln x) \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \operatorname{sen}(\ln x) \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \underbrace{\int_{\frac{1}{e}}^e \cos(\ln x) dx}_{(\alpha)} \end{aligned}$$

en (α) integramos por partes:

$$\begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & dv = dx \\ du = -\operatorname{sen}(\ln x) \frac{1}{x} dx & v = x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e \operatorname{sen}(\ln x) dx &= (x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x)) \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \operatorname{sen}(\ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[(x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x)) \Big|_{\frac{1}{e}}^e \right] \\ &= \frac{1}{2e} [(1+e^2) \operatorname{sen} 1 - (1-e^2) \cos 1]. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 202** Calcule $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} x 2^{2(x^2-1)} \operatorname{sen}(2x^2-2) dx$.

Solución

Sea $z = 2(x^2 - 1)$, tenemos $dz = 4x dx$

$$\int x 2^{2(x^2-1)} \operatorname{sen}(2x^2-2) dx = \frac{1}{4} \int 2^z \operatorname{sen} z dz.$$

Integrando por partes esta última, se tiene

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} z & dv &= 2^z dz \\ du &= \cos z dz & v &= \frac{2^z}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x 2^{2(x^2-1)} \operatorname{sen}(2x^2-2) dx &= \frac{1}{4} \left(\frac{2^z}{\ln 2} \operatorname{sen} z - \frac{1}{\ln 2} \int 2^z \cos z dz \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2^z}{\ln 2} \operatorname{sen} z - \frac{2^z}{\ln^2 2} \cos z - \frac{1}{\ln^2 2} \int 2^z \operatorname{sen} z dz \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int x 2^{2(x^2-1)} \operatorname{sen}(2x^2-2) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2^z}{\ln 2} \operatorname{sen} z - \frac{2^z}{\ln^2 2} \cos z \right) \frac{\ln 2}{\ln^2 2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \left(2^z \operatorname{sen} z - \frac{2^z}{\ln 2} \cos z \right) \frac{\ln 2}{\ln^2 2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \left(2^{2(x^2-1)} \operatorname{sen} [2(x^2-1)] - \frac{2^{2(x^2-1)}}{\ln 2} \cos [2(x^2-1)] \right) \frac{\ln 2}{\ln^2 2 + 1}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left(2^{2(x^2-1)} \operatorname{sen} [2(x^2-1)] - \frac{2^{2(x^2-1)}}{\ln 2} \cos [2(x^2-1)] \right) \frac{\ln 2}{\ln^2 2 + 1} \Bigg|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\ln 2}{\ln^2 2 + 1} \left[\left(2^\pi \operatorname{sen} \pi - \frac{2^\pi}{\ln 2} \cos \pi \right) - \left(2^{-2} \operatorname{sen}(-2) - \frac{2^{-2}}{\ln 2} \cos(-2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{\ln 2}{\ln^2 2 + 1} \left[\frac{2^\pi}{\ln 2} + 2^{-2} \operatorname{sen} 2 + \frac{2^{-2}}{\ln 2} \cos 2 \right]. \end{aligned}$$

■

7.9 Ejercicios propuestos

1. Usando sumas de Riemann, evalúe:

$$a) \int_{-2}^2 (3^{-x+1} - 2x) dx$$

$$c) \int_{-1}^2 \left(\frac{x^3 + 3x^2}{2} \right) dx$$

$$b) \int_0^1 (x^2 - 5^{x-1}) dx$$

$$d) \int_1^2 (\sqrt{x-1} - 3)^2 dx$$

2. Expresa los siguientes límites de sumas como una integral definida en el intervalo que se indica

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{4n} \left(4^{\frac{3i}{n}} \right) - 9 \left(\frac{3}{n} - \frac{18}{n^2} i + \frac{27}{n^3} i^2 \right) \right]; I = [-1, 2]$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n+i}{i^2 + 2ni + 6n^2} \right); I = [1, 2]$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{5\pi}{n} \tan \left(\frac{55\pi}{7} + \frac{8\pi}{n} i \right); I = [\pi, 2\pi]$$

3. Sean f y g dos funciones continuas e impares en $\mathbb{R}$. Si se cumple que:

$$\int_{-3}^9 [x^2 f(x) - 5g(x) \cos x] dx = 20 \text{ y } \int_3^9 x^2 f(-x) dx = 4.$$

$$\text{Calcule, } \int_3^9 g(-x) \cos(-x) dx.$$

4. Sean f y g dos funciones integrables en $\mathbb{R}$ tales que:

$$\int_{\sqrt[3]{6}}^2 x^2 f(x^3 - 1) dx = 2; \int_{-5}^7 [f(x) + g(x)] dx = 30 \text{ y } \int_5^0 g(x) dx = -2$$

$$\text{Si } f(x) + f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } g(-x) - g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Halle } \int_5^7 g(x) dx$$

5. Sea la función $g(x) = x^2 \sin x + x^2 \frac{\ln(x^3 + 1)}{x^3 + 1}$ y f una función continua.

$$\text{Si se sabe que, } \int_1^4 f(t) dt = \frac{1}{6} \ln^2 \left(\frac{7}{8} \right).$$

$$\text{Calcule } \int_0^{\ln 4} e^x f(e^x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) dx$$

6. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$, con $x > 0$ tal que:

$$x^5 + \frac{2 \cos(\pi x)}{x^2 + 1} = \int_{3x^2}^3 e^{x^3+2} f(5-t) dt.$$

Calcule el valor de $f(2)$.

7. Sea f una función derivable para todo $x > \frac{3}{2}$ tal que

$$f(3^x) + \ln(x^2 - 1) = \int_2^x x^4 g(t^4 - 1) dt$$

si $g(15) = 1$, calcule el valor de $f'(9)$.

8. Si f es una función continua impar en $[-1, 1]$, usando propiedades de la integral definida y el segundo teorema fundamental del cálculo, evalúe

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} + f(x) \cos(3x) \right] dx$$

9. Sea f una función par y continua en $\mathbb{R}$ tal que

$$\int_4^6 \left[f(x-5) - \frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-4)x+5}} \right] dx = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

Calcule $\int_0^1 f(x) dx$

10. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ Rpta. $4 - \pi$
11. $\int_0^\pi \frac{1}{3 + 2 \cos x} dx$ con $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = z$ Rpta. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$
12. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$ con $x = \sec u$ Rpta. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
13. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ Rpta. $4 - \pi$
14. $\int_0^5 \frac{1}{2x + \sqrt{3x+1}} dx$ Rpta. $\frac{\ln 112}{5}$
15. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$
16. $\int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$, con $x = t^2$ Rpta. $4 - 2 \ln 3$
17. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$, con $e^x - 1 = z^2$ Rpta. $2 - \frac{\pi}{2}$
18. $\int_0^1 \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} dx$ Rpta. $\ln 2$
19. $\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1} dx$ Rpta. $1 - \ln 3$
20. $\int_0^2 \frac{|2-2x|}{(x+2)^2} dx$
21. $\int \left| \frac{x-1}{x+6} \right| dx$

Integrales impropias de límites infinitos
 Integrales impropias con límites finitos
 Ejercicios resueltos
 Función Gamma
 Función Beta
 Ejercicios propuestos
 Algunas fórmulas

8. Integrales impropias

8.1 Integrales impropias de límites infinitos

Definición 8.1.1 — Integrales con el límite superior, infinito.

Sea $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a; +\infty)$, entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se define como

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Si dicho límite existe, diremos que la integral impropia es **convergente**, en caso contrario diremos que es **divergente**.

■ **Ejemplo 203** Analizar la convergencia de la siguiente integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

Solución

La función $f(x) = e^{-x}$ es continua en $[0, +\infty)$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^b \\ &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^{-b} - e^0] = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^b} - 1 \right] = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ es convergente y su valor es 1. ■

Definición 8.1.2 — Integrales con el límite inferior, infinito.

Sea $f : \langle -\infty; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\langle -\infty; b]$, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se define como

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Si dicho límite existe, diremos que la integral impropia es **convergente**, en caso contrario diremos que es **divergente**.

- **Ejemplo 204** Analizar la convergencia de la siguiente integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es continua en $\langle -\infty, -1]$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} \Big|_a^{-1} \\ &= -\lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-1 - \frac{1}{a} \right] = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$ es convergente y su valor es 1. ■

Definición 8.1.3 — Integrales con los límites de integración infinitos.

Sea $f : \langle -\infty; +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ se define como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

donde c es un número real arbitrario. Si las integrales impropias $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ y $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ son convergentes, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es **convergente**, en caso contrario diremos que es **divergente**.

- **Ejemplo 205** Analizar la convergencia de la siguiente integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{x^2 + 4} dx$

Solución

La función $f(x) = \frac{6}{x^2+4}$ es continua en $\langle -\infty, +\infty \rangle$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{x^2+4} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{6}{x^2+4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{6}{x^2+4} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{6}{x^2+4} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{6}{x^2+4} dx \\ &= 6 \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_a^0 + 6 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^b \\ &= 3 \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\arctan 0 - \arctan\left(\frac{a}{2}\right) \right] + 3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctan\left(\frac{b}{2}\right) - \arctan 0 \right] \\ &= 3\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 3\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{x^2+4} dx$ es convergente y su valor es 3π . ■

8.2 Integrales impropias con límites finitos

Definición 8.2.1 — Integrales con discontinuidad en el extremo inferior del intervalo de integración.

Sea $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\langle a, b \rangle$ y si $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = +\infty$

entonces la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ se define como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Si dicho límite existe, diremos que la integral impropia es convergente, en caso contrario diremos que es divergente.

■ **Ejemplo 206** Analizar la convergencia de $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ es continua en $\langle 3, 7 \rangle$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} |f(x)| = +\infty$, por definición se tiene

$$\begin{aligned} \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{3+\varepsilon}^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2(x-3)^{1/2} \Big|_{3+\varepsilon}^7 = 2 \left[4^{1/2} - \varepsilon^{1/2} \right] = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto la integral $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$ es convergente y su valor es igual a 4. ■

Definición 8.2.2 — Integrales con discontinuidad en el extremo superior del intervalo de integración.

Sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b)$ y si $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = +\infty$

entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ se define como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Si dicho límite existe, diremos que la integral impropia es convergente, en caso contrario diremos que es divergente.

■ **Ejemplo 207** Analizar la convergencia de $\int_2^4 \frac{3}{x-4} dx$

Solución

La función $f(x) = \frac{3}{x-4}$ es continua en $[2, 4)$, y $\lim_{x \rightarrow 4^-} |f(x)| = +\infty$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{3}{x-4} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_2^{4-\varepsilon} \frac{3}{x-4} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 3 \ln |x-4| \Big|_2^{4-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [3 \ln | -2 | - 3 \ln | -\varepsilon |] = 3 \ln 2 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto la integral $\int_2^4 \frac{3}{x-4} dx$ es divergente. ■

Definición 8.2.3 — Integrales con discontinuidad en el interior del intervalo de integración.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ excepto en c , donde

$a < c < b$ y si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$ entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ se define como

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \end{aligned}$$

Si ambos límites existen, diremos que la integral impropia es convergente, en caso contrario diremos que es divergente.

8.3 Ejercicios resueltos

■ **Ejemplo 208** Analizar la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 6x + 5} dx.$$

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 5} = \frac{1}{(x+5)(x+1)}$ es continua en $[4, +\infty)$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 6x + 5} dx = \int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2 - 2^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{1}{(x+3)^2 - 2^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{1}{(x+5)(x+1)} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} \right) dx = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln|x+1| - \ln|x+5|]_4^b \\ &= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x+5} \right|_4^b = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \left| \frac{b+1}{b+5} \right| - \ln \frac{5}{9} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{b+1}{b+5} \right| - \ln \frac{5}{9} \right] = \frac{1}{4} \left[\ln \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \left| \frac{b+1}{b+5} \right| \right) - \ln \frac{5}{9} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{5}{b}} \right| \right) - \ln \frac{5}{9} \right] = \frac{1}{4} \left[\ln 1 - \ln \frac{5}{9} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \ln \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

La integral es convergente. ■

■ **Ejemplo 209** Calcule el valor de c para que la integral impropia

$\int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{x+3} - \frac{c}{x-1} \right) dx$ sea convergente y determinar el valor de esta integral, para el valor c hallado.

Solución

La función $f(x) = \frac{2}{x+3} - \frac{c}{x-1}$ es continua en $[2, +\infty)$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{x+3} - \frac{c}{x-1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \left(\frac{2}{x+3} - \frac{c}{x-1} \right) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [2 \ln|x+3| - c \ln|x-1|]_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [2 \ln|b+3| - c \ln|b-1| - 2 \ln 5] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{(b+3)^2}{25(b-1)^c} \right) \right] = \ln \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b+3)^2}{25(b-1)^c} \right) \right] \end{aligned}$$

Para que el límite exista, el grado del numerador debe ser igual al grado del denominador, por tanto $c = 2$, así

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{x+3} - \frac{2}{x-1} \right) dx = \ln \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^2 + 6b + 9}{25b^2 - 50b + 25} \right) \right] = \ln \frac{1}{25}$$

■ **Ejemplo 210** Analizar la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$$

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ es continua en $\langle 0, 1 \rangle$ tiene asíntota vertical en $x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| = +\infty$, luego por definición se tiene

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1}$$

Resolviendo la integral indefinida, si $u = e^x$, tenemos $du = e^x dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} &= \int \frac{du}{u^2 - 1} = \int \left(\frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \right) du; \text{ donde } A = 1/2; \quad B = -1/2 \\ &= \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + K. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| \right|_{\varepsilon}^1 \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln \left| \frac{e-1}{e+1} \right| - \ln \left| \frac{e^{\varepsilon} - 1}{e^{\varepsilon} + 1} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e-1}{e+1} \right| - (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

La integral es divergente. ■

■ **Ejemplo 211** Analizar la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctan(e^x) \Big|_b^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan(e^x) \Big|_0^b \\
&= \lim_{b \rightarrow -\infty} (\arctan 1 - \arctan e^b) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan e^b - \arctan 1) \\
&= \frac{\pi}{4} - \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctan e^b + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan e^b - \frac{\pi}{4} \\
&= -\arctan \left(\lim_{b \rightarrow -\infty} e^b \right) + \arctan \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} e^b \right) \\
&= -\arctan 0 + \arctan(+\infty) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral impropia es convergente. ■

■ **Ejemplo 212** Analizar la convergencia de la siguiente integral $\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{(1-x)^{2/3}} dx$

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{2/3}}$ es continua en $[-2, 1) \cup \langle 1, +\infty \rangle$ y

$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = +\infty$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{(1-x)^{2/3}} dx &= \int_{-2}^{+\infty} (1-x)^{-2/3} dx \\
&= \underbrace{\int_{-2}^1 (1-x)^{-2/3} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^2 (1-x)^{-2/3} dx}_{I_2} + \underbrace{\int_2^{+\infty} (1-x)^{-2/3} dx}_{I_3}
\end{aligned}$$

Desarrollando I_1 .

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-2}^{1-\varepsilon} (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_{-2}^{1-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(3(-\varepsilon)^{1/3} - 3(-3)^{1/3} \right) = 3\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

De manera similar I_2

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_{1+\varepsilon}^2 \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(3 - 3(1+\varepsilon-1)^{1/3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(3 - 3\varepsilon^{1/3} \right) = 3
\end{aligned}$$

Desarrollando I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 3(x-1)^{1/3} \Big|_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (3(b-1)^{1/3} - 3) = +\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto la integral impropia es divergente. ■

■ **Ejemplo 213** Analizar la convergencia de la integral. $\int_{-3}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} dx$.

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$ es continua en $[-3, 2)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} |f(x)| = +\infty$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-3}^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-3}^{2-\varepsilon} (2-x)^{-2/3} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-3(2-x)^{1/3} \right]_{-3}^{2-\varepsilon} \\ &= -3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\varepsilon^{1/3} - 5^{1/3} \right] = 3\sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

Luego la integral impropia es convergente. ■

■ **Ejemplo 214** Analizar la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx$.

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}}$ es continua en $\langle 1, +\infty \rangle$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x)| = +\infty$, por definición se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx \\ &= \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx}_{I_2} \end{aligned}$$

Hallando $\int \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx$. Sea $x-1 = t^2$, tenemos $dx = 2dt$, re-

emplazando

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx &= \int \frac{1}{t^3 + t} 2t dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C\end{aligned}$$

Luego para I_1 ,

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2 \arctan \sqrt{x-1} \right]_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2 \arctan 1 - 2 \arctan \sqrt{1+\varepsilon-1} \right] = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

para I_2 ,

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[2 \arctan \sqrt{x-1} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[2 \arctan \sqrt{b-1} - 2 \arctan 1 \right] = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

De donde

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Por lo tanto la integral impropia es convergente. ■

■ **Ejemplo 215** Analizar la convergencia de $\int_1^{+\infty} |1-x| e^{-(x-1)^2} dx$.

Solución

Por definición de valor absoluto se tiene:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & , \quad x \leq 1 \\ x-1 & , \quad x > 1 \end{cases},$$

luego en la integral la función $f(x) = |1-x| e^{-(x-1)^2}$ es continua en $[1, +\infty)$, por definición tenemos

$$\begin{aligned}I &= \int_1^{+\infty} |1-x| e^{-(x-1)^2} dx \\ &= \int_1^{+\infty} (x-1) e^{-(x-1)^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b (x-1) e^{-(x-1)^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-(x-1)^2} \right]_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{-(b-1)^2} - 1 \right] = -\frac{1}{2} \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-(b-1)^2} - 1 \right] \\ &= -\frac{1}{2} [0 - 1] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Luego la integral impropia es convergente. ■

■ **Ejemplo 216** Analizar la convergencia de $\int_0^9 \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx$

Solución

Como

$$(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1} = 0 \iff \sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x-1} + 1) = 0 \iff x = 1 \text{ o } x = 0.$$

Luego, la función $f(x) = \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}}$ es continua en $[0, 1) \cup (1, 9]$, y usando la definición tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^9 \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx + \int_1^9 \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx \\ &\quad + \int_1^9 \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^9 \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx. \end{aligned}$$

Halleemos la integral indefinida, sea $u^3 = x - 1$, tenemos $3u^2 du = dx$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1}} dx &= \int \frac{3u^2}{u^2 + u} du = 3 \int \left(1 - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= 3(u - \ln|u+1|) \\ &= 3\left(\sqrt[3]{x-1} - \ln\left|\sqrt[3]{x-1} + 1\right|\right) + C. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 3 \left(\sqrt[3]{x-1} - \ln \left| \sqrt[3]{x-1} + 1 \right| \right) \Big|_{\varepsilon}^{1/2} + \\
 &\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 3 \left(\sqrt[3]{x-1} - \ln \left| \sqrt[3]{x-1} + 1 \right| \right) \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} + \\
 &\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 3 \left(\sqrt[3]{x-1} - \ln \left| \sqrt[3]{x-1} + 1 \right| \right) \Big|_{1+\varepsilon}^9 \\
 &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\sqrt[3]{-1/2} - \ln \left| \sqrt[3]{-1/2} + 1 \right| - \left(\sqrt[3]{\varepsilon-1} - \ln \left| \sqrt[3]{\varepsilon-1} + 1 \right| \right) \right] + \\
 &\quad 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\sqrt[3]{-\varepsilon} - \ln \left| \sqrt[3]{-\varepsilon} + 1 \right| - \left(\sqrt[3]{-1/2} - \ln \left| \sqrt[3]{-1/2} + 1 \right| \right) \right] + \\
 &\quad 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2 - \ln 3 - \left(\sqrt[3]{\varepsilon} - \ln \left| \sqrt[3]{\varepsilon} + 1 \right| \right) \right] \\
 &= 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\sqrt[3]{\varepsilon-1} + \ln \left| \sqrt[3]{\varepsilon-1} + 1 \right| - 2\sqrt[3]{\varepsilon} - \ln \left| -\sqrt[3]{\varepsilon} + 1 \right| + \right. \\
 &\quad \left. \ln \left| \sqrt[3]{\varepsilon} + 1 \right| + 2 + \ln 3 \right] \\
 &= 3 \left[1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \left| \sqrt[3]{\varepsilon-1} + 1 \right| + 2 + \ln 3 \right] = +\infty.
 \end{aligned}$$

Luego la integral impropia es divergente. ■

■ **Ejemplo 217** Analizar la convergencia de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

Solución

La función $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ es continua en $\langle -\infty, +\infty \rangle$, luego por definición se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{(1+x^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{xdx}{(1+x^2)^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{1+x^2} \Big|_a^0 \right) + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1+x^2} \Big|_0^b \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\lim_{a \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+b^2} - 1 \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} (1 - 0 + 0 - 1) = 0.
 \end{aligned}$$

Luego la integral impropia es convergente. ■

8.4 Función Gamma

La función $\Gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función gamma y está definida por

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p-1} du$$

Esta integral impropia es convergente para $p > 0$

Propiedades:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p > -1$
3. $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
4. $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

■ **Ejemplo 218** Pruebe la propiedad $\Gamma(1) = 1$.

Prueba.

En la definición haciendo $p = 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{1-1} du = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-u} du \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-u}]_0^b = -\lim_{b \rightarrow +\infty} [e^{-b} - e^0] = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^b} - 1 \right] = 1 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 219** Pruebe la propiedad $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p > -1$.

Prueba.

En la definición, sea $p > -1$

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p+1-1} du = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^p du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-u} u^p du$$

Integrando por partes. Sea

$$\begin{aligned} r &= u^p & dv &= e^{-u} du \\ dr &= pu^{p-1} & v &= -e^{-u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-u^p e^{-u} \Big|_0^b + p \int_0^b e^{-u} u^{p-1} du \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{b^p}{e^b} + 0 \right] + p \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-u} u^{p-1} du \\ &= 0 + p \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p-1} du \\ \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 220** Pruebe la propiedad $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$
Prueba.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)\Gamma(1) \\ &= n!\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 221** Pruebe la propiedad $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
Prueba.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{2}-1} du = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du$$

Sea $u = t^2$, tenemos $du = 2t dt$ y cambiando los límites de integración si $u \rightarrow 0$, tenemos que $t \rightarrow 0$, y si $u \rightarrow +\infty$, tenemos que $t \rightarrow +\infty$, reemplazando

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2(-\frac{1}{2})} 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

■ **Ejemplo 222** Evalúe $\int_{+\infty}^0 e^{-u} u^5 du$

Solución

$$\int_{+\infty}^0 e^{-u} u^5 du = - \int_0^{+\infty} e^{-u} u^5 du = -\Gamma(6) = -5! = -120$$

■ **Ejemplo 223** Evalúe $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{5}{2}} du$

Solución

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{5}{2}} du = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{15\pi}{8}$$

■ **Ejemplo 224** Evalúe $\int_0^{+\infty} x e^{-x^3} dx$

Solución

Sea $t = x^3$, tenemos $dt = 3x^2 dx = 3t^{2/3} dx$. Además cuando $x \rightarrow 0$ tenemos que $t \rightarrow 0$, y cuando $x \rightarrow +\infty$ tenemos que $t \rightarrow +\infty$. Reemplazando

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x e^{-x^3} dx &= \int_0^{+\infty} t^{1/3} e^{-t} \left(\frac{1}{3} t^{-2/3} dt \right) = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^{-1/3} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} (t)^{\frac{2}{3}-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 225** Evalúe $\int_0^1 x^a (\ln x)^b dx$; $b \in \mathbb{N}$ y $a > 0$.

Solución

Sea $t = -(a+1) \ln x$, tenemos $x = e^{-\frac{t}{a+1}}$, luego $dx = -\frac{1}{a+1} e^{-\frac{t}{a+1}} dt$. Además cuando $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow +\infty$ y si $x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0$. Reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 x^a (\ln x)^b dx = \int_{+\infty}^0 e^{-\frac{ta}{a+1}} \left(\frac{-t}{a+1} \right)^b \left(\frac{-1}{a+1} e^{-\frac{t}{a+1}} dt \right) \\ &= -\frac{(-1)^{b+1}}{(a+1)^{b+1}} \int_0^{+\infty} t^b e^{-t} dt = -\frac{(-1)^{b+1}}{(a+1)^{b+1}} \int_0^{+\infty} t^{(b+1)-1} e^{-t} dt \\ &= -\frac{(-1)^{b+1}}{(a+1)^{b+1}} \Gamma(b+1).\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 226** Calcule $\int_0^{\pi/2} \tan^8 x \sec^2 x e^{-\tan x} dx$

Solución

Sea $u = \tan x$, tenemos $du = \sec^2 x dx$, cambiando los límites, si $x \rightarrow 0^+$ implica $u \rightarrow 0^+$ y si $x \rightarrow \pi/2$ implica $u \rightarrow +\infty$.

Reemplazando

$$\int_0^{\pi/2} \tan^8 x \sec^2 x e^{-\tan x} dx = \int_0^{+\infty} u^8 e^{-u} du = \Gamma(8+1) = 8! = 40320$$

■ **Ejemplo 227** Calcule $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2 \ln x}} dx$

Solución

Si $-\ln x = t$, implica $x = e^{-t}$, con ello $dx = -e^{-t} dt$, cambiando los límites de integración, si $x \rightarrow 0$, tenemos $t \rightarrow +\infty$, y si $x \rightarrow 1$, tenemos $t \rightarrow 0$. Luego:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2\ln x}} dx &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2t}} (-e^{-t} dt) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 228** Calcule $\int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-x^5} dx$

Solución

Sea $x = u^{1/5}$, tenemos $dx = \frac{1}{5} u^{-4/5} du$, cambiando los límites de integración, si $x = 0$, tenemos $u = 0$, y si $x \rightarrow +\infty$, tenemos $u \rightarrow +\infty$, luego

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{+\infty} \left(u^{1/5}\right)^{3/2} e^{-u} \left(\frac{1}{5} u^{-4/5}\right) du = \frac{1}{5} \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{5} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{5}\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 229** Calcule $I = \int_0^{+\infty} a^{-bx^c} dx$; $a, b \in \mathbb{N}^*$ y $c \in \mathbb{Q}^*$.

Solución

Con el fin de que el integrando tenga la forma de la función gamma, reescribimos $a = e^{\ln a}$, con ello

$$I = \int_0^{+\infty} a^{-bx^c} dx = \int_0^{+\infty} \left(e^{\ln a}\right)^{-bx^c} dx = \int_0^{+\infty} e^{-b(\ln a)x^c} dx$$

Sea $t = b(\ln a)x^c$, tenemos $dt = bc(\ln a)x^{c-1} dx$, además:
cuando $x \rightarrow 0$, tenemos $t \rightarrow 0$ y si $x \rightarrow +\infty$, tenemos $t \rightarrow +\infty$. Luego

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{bc(\ln a)x^{c-1}} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{xdt}{ct} \\ &= \left(\frac{1}{b\ln a}\right)^{\frac{1}{c}} \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{c}-1} dt \\ &= \left(\frac{1}{b\ln a}\right)^{\frac{1}{c}} \frac{1}{c} \Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

■

8.5 Función Beta

Sea $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función beta y está definida por

$$\beta(m, n) = \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du$$

que resulta convergente para todo $m > 0$ y $n > 0$.

Propiedades

1. $\beta(m, n) = \beta(n, m)$
2. $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$
3. $\frac{1}{2} \beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$
4. $\beta(p, 1-p) = \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad 0 < p < 1$

■ **Ejemplo 230** Pruebe la propiedad $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

Prueba

En la definición $\beta(m, n) = \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du$

Haciendo $t = 1 - u$, tenemos $dt = -du$; cambiando los límites de integración si $u = 0$, tenemos $t = 1$ y si $u = 1$, tenemos $t = 0$, reemplazando

$$\begin{aligned} \beta(m, n) &= - \int_1^0 (1-t)^{m-1} t^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{m-1} dt \\ &= \beta(n, m) \end{aligned}$$

Es llamada propiedad de **simetría**. ■

■ **Ejemplo 231** Pruebe la propiedad $\frac{1}{2} \beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$

Prueba

Usando la definición para $\beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, tenemos

$$\begin{aligned} \beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) &= \int_0^1 u^{\frac{m+1}{2}-1} (1-u)^{\frac{n+1}{2}-1} du \\ &= \int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}} du \end{aligned}$$

sea $u = \sin^2 \theta$, tenemos $du = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$. Cuando $u = 0$, tenemos $\theta = 0$,

y si $u = 1$, tenemos $\theta = \frac{\pi}{2}$, así

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{\frac{m-1}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{\frac{m-1}{2}} (\cos^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \cos^n \theta \, d\theta \\ \frac{1}{2} \beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \cos^n \theta \, d\theta\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 232** Evalúe $\int_0^1 u^4 (1-u)^3 \, du$

Solución

$$\int_0^1 u^4 (1-u)^3 \, du = \beta(5, 4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4!3!}{8!} = \frac{1}{280}$$

■ **Ejemplo 233** Evalúe $\int_1^0 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{5}{2}} \, du$

Solución

$$\begin{aligned}\int_1^0 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{5}{2}} \, du &= - \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{5}{2}} \, du = -\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)} = -\frac{\sqrt{\pi} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{2} = -\frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 234** Evalúe $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta$

Solución

Dando la forma de una función beta

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 \theta \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{0+1}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 235** Evalúe $\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3} dy$

Solución

$$\begin{aligned}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3} dy &= \beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{\Gamma(2/3)\Gamma(4/3)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{\Gamma(2/3)\frac{1}{3}\Gamma(1/3)}{2} = \frac{1}{6}\Gamma(1-1/3)\Gamma(1/3) \\ &= \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 236** Evalúe $\int_1^4 \sqrt[5]{(x-1)^2(4-x)^3} dx$

Solución

$$I = \int_1^4 \sqrt[5]{(x-1)^2(4-x)^3} dx = \int_1^4 (x-1)^{2/5}(4-x)^{3/5} dx$$

Sea $x-1=3z$, tenemos $dx=3dz$. Cambiando los límites de integración, si $x=1$, tenemos $z=0$ y si $x=4$, tenemos $z=1$.

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 (3z)^{2/5}(3-3z)^{3/5}(3dz) = 9 \int_0^1 z^{2/5}(1-z)^{3/5} dz = 9 \int_0^1 z^{7/5-1}(1-z)^{8/5-1} dz \\ &= 9\beta\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{9\Gamma(\frac{7}{5})\Gamma(\frac{8}{5})}{\Gamma(3)} = \frac{9(\frac{2}{5})\Gamma(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{3}{5})}{2!} \\ &= \frac{27}{25}\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{27}{25}\Gamma\left(1-\frac{3}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{27}{25} \frac{\pi}{\sin(3\pi/5)}\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 237** Si $3\beta(a, b) = \int_0^{3\pi} \cos^{15/2}\left(\frac{x}{6}\right) dx$, calcule el valor de $E = a + b$.

Solución

Sea $\theta = \frac{x}{6}$, tenemos $d\theta = \frac{1}{6} dx$, además, si $x=0$, tenemos $\theta=0$ y si $x=3\pi$, tenemos $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\beta(a, b) &= \frac{6}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^{15/2} \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^0 \theta \cos^{15/2} \theta d\theta \\ &= 2 \frac{1}{2} \beta\left(\frac{0+1}{2}, \frac{\frac{15}{2}+1}{2}\right) = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)\end{aligned}$$

De donde:

$$a = \frac{1}{2} \text{ y } b = \frac{17}{4}. \text{ De esta forma } E = a + b = \frac{1}{2} + \left(\frac{17}{4}\right) = \frac{19}{4}.$$

■ **Ejemplo 238** Calcule $\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$, donde $n \in \mathbb{N}^*$.

Solución

Como $(1-t^2)^n$ es una función par entonces $\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Sea $u = t^2$, tenemos $du = 2t dt$, con ello $t = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$.

Si $t \rightarrow 0^+$, tenemos $u \rightarrow 0^+$ y si $t \rightarrow 1^-$, tenemos $u \rightarrow 1^-$. Luego

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt &= 2 \int_0^1 (1-u)^n \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int_0^1 (1-u)^{n+1-1} u^{\frac{1}{2}-1} du \\ &= \beta\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) n!}{\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} n!}{(n+\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 239** Calcule $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$

Solución

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^0 x dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{4+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} \\ &= \frac{3 \Gamma(\frac{1}{2}+1) \Gamma(\frac{1}{2})}{4 \cdot 2!} = \frac{3}{8} \frac{1}{2} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} \pi. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 240** Calcule $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{\cos^5(\arctan x)} \sin^{13}(\arctan x)}{x^2+1} dx$.

Solución

Sea $u = \arctan x$, tenemos $du = \frac{dx}{x^2+1}$. Además

si $x \rightarrow 0$, tenemos $u \rightarrow 0$, y si $x \rightarrow +\infty$, tenemos $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Reemplazando tenemos

una función beta

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{5/3}(u) \operatorname{sen}^{13}(u) du = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{\frac{5}{3}+1}{2}, \frac{13+1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \beta\left(\frac{4}{3}, 7\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma(7)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+7\right)} = \frac{1}{2} \frac{6! \cdot \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\frac{22}{3} \cdot \frac{19}{3} \cdot \frac{16}{3} \cdot \dots \cdot \frac{4}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{6!}{\frac{22}{3} \cdot \frac{19}{3} \cdot \frac{16}{3} \cdot \dots \cdot \frac{4}{3}}
 \end{aligned}$$

■

8.6 Ejercicios propuestos

1. Evaluar las siguientes integrales:

$$a) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \quad \text{Rpta. 2}$$

$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad \text{Rpta. 0}$$

$$c) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} \quad \text{Rpta. 0}$$

$$d) \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx \quad \text{Rpta. 6}$$

$$e) \int_0^3 \frac{x dx}{(x^2-1)^{2/3}} \quad \text{Rpta. } \frac{9}{2}$$

$$f) \int_0^1 x \ln x dx \quad \text{Rpta. } -\frac{1}{4}$$

$$g) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} \quad \text{Rpta. } \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

$$h) \int_0^{2a} \frac{2x}{(x^2-a^2)^{2/3}} dx \quad \text{Rpta. } 4a^{2/3}$$

2. Analizar la convergencia de las siguientes integrales

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^4)^{1/2}} \quad \text{Rpta. Converge}$$

$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} dx \quad \text{Rpta. Converge}$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} \quad \text{Rpta. Diverge}$$

$$d) \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^m}, \text{ donde } a < b, m \in \mathbb{Z}, m \neq 1$$

Rpta. Si $m < 1$, converge; si $m > 1$, diverge

$$e) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$$

$$f) \int_{-\infty}^0 \frac{5 dx}{x^2-3x+2}$$

$$g) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

$$h) \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$$

$$i) \int_0^{\sqrt[27]{2}} \frac{2-\sqrt[3]{x}}{x} dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-3 \ln x}} dx$$

4. $\int_0^{+\infty} 6^{-4x^2} dx$

5. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}} dx$

6. $\int_0^1 (x \ln x)^3 dx$

7. $\int_0^1 (\ln x)^4 dx$

8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt[4]{x}}} dx$

9. $\int_0^8 x^{-\frac{1}{2}} (2 - x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} dx$

10. $\int_0^1 x(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^6 \theta d\theta$

12. $\int_0^{\pi} \sin^7 \theta d\theta$

13. $\int_0^{2\pi} \cos^7 \theta d\theta$

14. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^5 \theta d\theta$

8.7 Algunas fórmulas

Reglas de derivación

Sean f y g funciones diferenciables, c y n son números reales arbitrarios.

$$1. \frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$2. \frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$3. \frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$4. \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{Regla del producto}$$

$$5. \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{Regla del cociente}$$

$$6. \frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{Regla de la cadena}$$

$$7. \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{Regla de la potencia}$$

$$8. \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$9. \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$10. \frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$11. \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$12. \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$13. \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$14. \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$15. \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$16. \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$17. \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$18. \frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$19. \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Trigonometría

1. $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
2. $1 + \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$
3. $1 + \csc^2 \theta = \cot^2 \theta$
4. $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$
5. $\cos(-\theta) = \cos \theta$
6. $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$
7. $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$
8. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
9. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
10. $\operatorname{sen}(2A) = 2 \operatorname{sen} A \cos A$
11. $\cos(2A) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$
12. $\operatorname{sen}^2 A = \frac{1 - \cos(2A)}{2}$
13. $\cos^2 A = \frac{1 + \cos(2A)}{2}$

Logaritmos

1. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ **cambio de base**
2. $\log_e x = \ln x$
3. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
4. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
5. $\ln(x^r) = r \ln x$



Bibliografía

- [1] Apostol, T.: *CALCULUS I - Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal* . Editorial Reverté. (2015).
- [2] Haaser, N. - La Salle, J. - Sullivan, J.: *Análisis Matemático: Curso de introducción Vol. I*. Segunda edición, Mexico Editorial Trillas. (2012).
- [3] Mejia, F. - Aguilar, L.: *Cálculo Integral*. Ediciones de la U, Universidad de Medellín. (2011).
- [4] Spiegel, M.: *Cálculo Superior* . Libros McGraw-Hill. (1990).
- [5] Spivak, M.: *Calculus*. Tercera edición en español, Barcelona, Editorial Reverte, (2014).
- [6] Stewart, J.: *Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas* . Octava edición, Cengage learning. (2016).
- [7] Venero, A.: *ANALISIS MATEMATICO 2* . Ediciones GEMAR. (2006).

Autores



DANNY JOEL APAZA NUÑEZ

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas por la Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNA); Magister en Matemática por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Profesor Asociado en el Departamento Académico de Matemática, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM).



ELBER ROGELIO VERA RODRIGUEZ

Ingeniero en Industrias Alimentarias por la Universidad Nacional Agraria La Molina; Maestro en Educación con mención en Educación Matemática y egresado del Doctorado en Educación por la Universidad Nacional de Educación (UNE). Profesor Asociado en el Departamento Académico de Matemática, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM).



LUCIO ELIAS FLORES BUSTINZA

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas por la Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNA); Magister en Matemática por la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco. (UNSAAC) y egresado del Doctorado en Estadística Aplicada por la Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNA). Su carrera profesional incluye experiencia en diversas instituciones académicas como la UNA, UNAJMA-Andahuaylas y UNAM de Moquegua.

El acelerado avance de la ciencia y tecnología en este casi primer cuarto de siglo XXI, nos invita a reflexionar y a priorizar qué contenidos deberían de formar parte de la currícula de un curso de cálculo integral. En la consecución de este objetivo, tratamos que a través de una sinergia de profesores con experiencia en el dictado del curso, brinden un material de mucho valor tanto didáctico como práctico, que será parte elemental en la formación de los estudiantes de ciencias e ingeniería.

Esta obra está dirigida a estudiantes de ciencias e ingeniería. Su propósito es el de proporcionar una exposición flexible de los métodos de integración que es la parte principal de este texto.

ISBN: 978-612-5086-34-1



Fondo Editorial
Universidad Nacional Agraria La Molina