

Cálculo para Ciencias

por Ely Guardia Jara y Victor Trejo Cadillo





UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

DR. AMÉRICO GUEVARA PÉREZ
Rector

PH.D. HÉCTOR GONZÁLES MORA
Vicerrector Académico

DRA. PATRICIA GIL KODAKA
Vicerrectora de Investigación

DR. JOSÉ CARLOS VILCAPOMA
Jefe del Fondo Editorial

ELY GUARDIA JARA - VÍCTOR TREJO CADILLO

Cálculo para Ciencias

Lima: 2024; 278 p.

© Ely Guardia Jara

© Víctor Trejo Cadillo

© Universidad Nacional Agraria La Molina

Av. La Molina s/n La Molina, Lima, Perú

Derechos reservados

ISBN: N° 978-612-5086-27-3

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-05854

Primera edición digital: junio de 2024

Diseño y diagramación:

Daniella Luna Barrios

Queda terminantemente prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, químico, óptico, incluyendo sistema de fotocopiado, sin autorización escrita de los autores.

Todos los conceptos expresados en la presente obra son responsabilidad de los autores.

Índice general

Prólogo	III
1. Coordenadas Polares	1
1.1. Sistema de coordenadas polares	1
1.2. Relación entre coordenadas polares y rectangulares	4
1.3. Ecuaciones polares y sus gráficas	9
1.3.1. Ecuación de la recta en coordenadas polares	9
1.3.2. Ecuación polar de una circunferencia	11
1.3.3. Ecuación general de las cónicas en coordenadas Polares .	13
1.4. Trazado de curvas en coordenadas polares	16
1.5. Intersección de curvas en coordenadas polares	30
<i>Ejercicios propuestos</i>	32
2. Integración Numérica	35
2.1. Preliminares	35
2.2. Integración numérica	43
2.2.1. Aproximación de una integral por sumas de Riemann . .	43
2.2.2. Fórmulas de integración de Newton-Cotes	46
2.2.3. Las reglas compuestas del Trapecio y de Simpson	51
<i>Ejercicios propuestos</i>	57
3. Funciones Gamma y Beta	63
3.1. Función Gamma de Euler	63
3.2. Función Beta de Euler	66
<i>Ejercicios propuestos</i>	69
4. Aplicaciones de la integral definida	71
4.1. Área de regiones planas en coordenadas rectangulares	71
<i>Ejercicios propuestos</i>	84

4.2. Area de regiones planas en coordenadas polares	86
<i>Ejercicios propuestos</i>	94
4.3. Volumen de sólidos de revolución	95
4.3.1. Método del disco circular	95
4.3.2. Método del anillo circular	99
4.3.3. Método de lámina cilíndrica	106
<i>Ejercicios propuestos</i>	112
4.4. Longitud del arco de una curva plana	114
4.4.1. Longitud del arco en coordenadas rectangulares	115
4.4.2. Longitud del arco cuando la curva es dada por ecuaciones paramétricas	121
4.4.3. Longitud del arco en coordenadas polares	124
<i>Ejercicios propuestos</i>	128
4.5. Area de una superficie de revolución	129
<i>Ejercicios propuestos</i>	135
4.6. Aplicaciones físicas	137
4.6.1. Trabajo	137
<i>Ejercicios propuestos</i>	141
4.6.2. Centro de Masa	142
<i>Ejercicios propuestos</i>	152
5. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales	155
5.1. Definiciones y terminologías	155
5.2. Soluciones	158
6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	163
6.1. Problemas de valor inicial	163
6.2. Existencia y Unicidad de Soluciones	164
<i>Ejercicios propuestos</i>	166
6.3. Ecuaciones de variables separables y reducibles a separables . . .	166
6.3.1. Ecuaciones separables	166
6.3.2. Ecuaciones reducibles a separables	168
<i>Ejercicios propuestos</i>	171
6.4. Ecuaciones con coeficientes homogéneos y reducibles a homogéneos	173
6.4.1. Ecuaciones con coeficientes homogéneos	173
6.4.2. Ecuaciones reducibles a coeficientes homogéneos	176
<i>Ejercicios propuestos</i>	177
6.5. Ecuaciones diferenciales exactas y Factores integrantes	178
6.5.1. Ecuaciones exactas	178
6.5.2. Factores integrantes	182

<i>Ejercicios propuestos</i>	185
6.6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	186
<i>Ejercicios propuestos</i>	195
6.7. Aplicaciones de EDO de primer orden	196
6.7.1. Trayectorias ortogonales	196
<i>Ejercicios propuestos</i>	200
6.7.2. Crecimiento - Decaimiento	202
<i>Ejercicios propuestos</i>	207
6.7.3. Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton	209
<i>Ejercicios propuestos</i>	211
6.7.4. Mezclas	212
<i>Ejercicios propuestos</i>	217
6.7.5. Modelo logístico	218
<i>Ejercicios propuestos</i>	221
7. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden	223
7.1. Preliminares	223
7.2. Reducción de orden	230
<i>Ejercicios propuestos</i>	232
7.3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.	232
7.3.1. Raíces reales distintas	233
7.3.2. Raíces repetidas	234
7.3.3. Raíces complejas	235
<i>Ejercicios propuestos</i>	237
7.4. Ecuaciones lineales no homogéneas	239
7.4.1. Método de los coeficientes indeterminados	240
<i>Ejercicios propuestos</i>	246
7.4.2. Método de Variación de parámetros	247
<i>Ejercicios propuestos</i>	250
7.4.3. Ecuación de Cauchy-Euler	252
<i>Ejercicios propuestos</i>	255
7.5. Ecuaciones no lineales	257
<i>Ejercicios propuestos</i>	258
7.6. Algunas aplicaciones de EDO de segundo orden	259
7.6.1. Cuerpos en caída libre	259
7.6.2. Cuerpos en caída y resistencia del aire	262
7.6.3. Sistemas de resorte y masa	263
<i>Ejercicios propuestos</i>	267
Bibliografía	269

Prólogo

Los autores aprovechan su experiencia académica para escribir y presentar el libro, *Cálculo para Ciencias*, con la intención de proporcionar un fundamento sólido de los principales temas que forman parte de los cursos de matemática universitaria y, al mismo tiempo, señalar la trascendencia e importancia de la matemática en la solución de problemas que se presentan en la vida real.

Creemos que un texto de esta naturaleza es adecuado para los estudiantes de ciencias e ingeniería, cuya relación con las aplicaciones les resultará una experiencia motivadora y alentadora. El único requisito matemático esencial es haber cursado cálculo diferencial e integral en la universidad.

El libro está organizado por capítulos y, en cada una de ellas se comienza por establecer las definiciones, propiedades, teoremas de los temas a tratar en él. Además de los ejemplos que ilustran y aclaran los conceptos teóricos expuestos, se finaliza con una lista de ejercicios propuestos que ayudará a reforzar los conocimientos adquiridos.

Los autores

Capítulo 1

Coordenadas Polares

En los cursos previos a este curso se ha utilizado el sistema de coordenadas cartesianas como referencia para la ubicación de puntos en el plano. Sin embargo existen otros sistemas de coordenadas que para determinados problemas pueden ser utilizados con mayores ventajas que el cartesiano. Uno de estos sistemas es el de coordenadas polares que definiremos a continuación.

1.1. Sistema de coordenadas polares

Para definir las coordenadas polares de un punto en el plano fijamos inicialmente en él un punto O al que denominaremos **polo** y una semirecta (rayo) horizontal fija con origen en el polo a la que llamaremos eje polar (E_p). Las coordenadas polares de un punto cualquiera del plano polar son $P(r, \theta)$, donde r : radio vector.

θ : ángulo polar expresado en radianes.

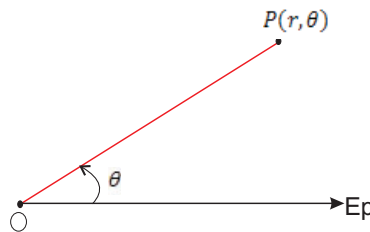


Figura 1.1:

Es importantes destacar las siguientes observaciones:

1. La longitud del radio vector es la distancia medida desde el polo al punto P , esto es $|r| = d(O, P) = |OP|$.
2. El ángulo polar se mide como en trigonometría y tiene: lado inicial (eje polar), vértice (el polo) y lado final o terminal.

3. El ángulo θ es positivo cuando se mide en sentido antihorario y es negativo cuando se mide en sentido horario.
4. Si el radio vector r es positivo, entonces el radio vector $\overline{OP}$ se encuentra en el lado final del ángulo θ ; en cambio si el radio vector r es negativo, entonces el radio vector $\overline{OP}$ se encuentra en la extensión o prolongación del lado final del ángulo θ , pero sobre el rayo $\pi + \theta$. (Ver figura 1.2)

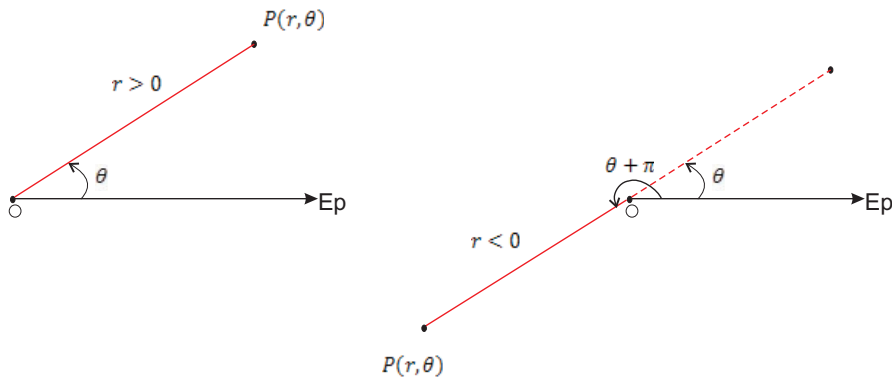


Figura 1.2:

5. Las coordenadas polares de un punto dado no son únicas, es decir infinitos pares de la forma (r, θ) tienen asociados el mismo punto debido a que θ y $\theta + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ determinan la misma dirección. Así también la dirección opuesta a la determinada por el ángulo $\theta + \pi$ es (r, θ) o bien $(-r, \theta + \pi)$ que son dos representaciones de un mismo punto. En general,

$$P(r, \theta) = P((-1)^n r, \theta + n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Cualquier par de coordenadas de la forma $(0, \theta)$ representa el polo.

Nota: Se denomina **par principal** al par (r, θ) , $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejemplo 1.1 En un sistema polar grafique los puntos dados y luego encuentre sus equivalentes :

$$P_1\left(4, \frac{\pi}{3}\right), \quad P_2\left(4, -\frac{\pi}{6}\right) \quad P_3\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Solución.

- Para el punto $P_1\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$.

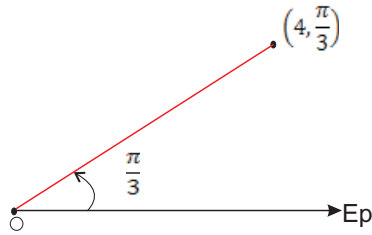


Figura 1.3:

Los puntos equivalentes son:

$$\left(4, \frac{7\pi}{3}\right), \quad \left(4, -\frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(-4, \frac{4\pi}{3}\right), \quad \left(-4, -\frac{2\pi}{3}\right)$$

- Para el punto $P_2\left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$.

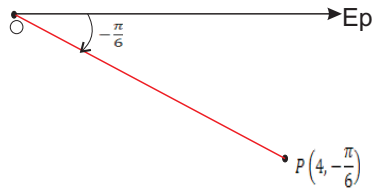


Figura 1.4:

Los puntos equivalentes son:

$$\left(4, -\frac{13\pi}{6}\right), \quad \left(4, \frac{11\pi}{6}\right), \quad \left(-4, -\frac{7\pi}{6}\right), \quad \left(-4, \frac{5\pi}{6}\right).$$

- Para el punto $P_3\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Los puntos equivalentes son:

$$\left(-2, \frac{11\pi}{4}\right), \quad \left(-2, -\frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(2, \frac{7\pi}{4}\right), \quad \left(2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

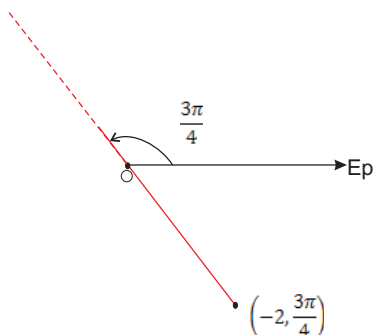


Figura 1.5:

1.2. Relación entre coordenadas polares y rectangulares

En ciertas situaciones es necesario transformar la ecuación cartesiana de un lugar geométrico en la respectiva ecuación polar y viceversa. Las fórmulas que permiten estas transformaciones se pueden determinar fácilmente si consideramos un sistema rectangular y un sistema polar de manera que el origen y la parte positiva del eje X del primero se hacen coincidir con el polo y el eje polar del segundo; y la parte positiva del eje Y con el rayo para la cual $\theta = \pi/2$, tal como se indica en la Figura 1.6

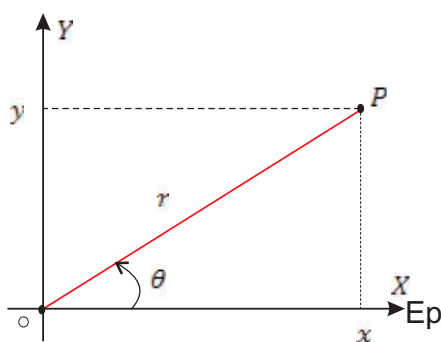


Figura 1.6:

Sea P un punto cualquiera que tenga por coordenadas cartesianas (x, y) y por coordenadas polares (r, θ) . Entonces, de la figura 1.6, se deducen inmediatamente las relaciones siguientes:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \dots\dots\dots(3)$$

Ejemplo 1.2 Halle las coordenadas cartesianas de cada uno de los siguientes puntos: $P_1 \left(6, \frac{5\pi}{4} \right)$, $P_2 \left(-4, \frac{4\pi}{3} \right)$ y $P_3 \left(-2, -\frac{7\pi}{6} \right)$.

Solución.

Para el punto P_1 se tiene $r = 6$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$. Luego, usando las relaciones (1) y (2) tenemos:

$$x = r \cos \theta = 6 \cos \frac{5\pi}{4} = 6 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -3\sqrt{2}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = 6 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = 6 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -3\sqrt{2}$$

$$P_1 \left(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2} \right)$$

De igual forma para P_2 con $r = -4$ y $\theta = \frac{4\pi}{3}$, tenemos:

$$x = r \cos \theta = -4 \cos \frac{4\pi}{3} = -4 \left(-\frac{1}{2} \right) = 2$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = -4 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}$$

$$P_2 \left(2, 2\sqrt{3} \right)$$

Por último para P_3 con $r = -2$ y $\theta = -\frac{7\pi}{6}$, tenemos:

$$x = r \cos \theta = -2 \cos \left(-\frac{7\pi}{6} \right) = -2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = -2 \operatorname{sen} \left(-\frac{7\pi}{6} \right) = -2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1$$

$$P_3 \left(\sqrt{3}, -1 \right)$$

Ejemplo 1.3 Halle un par de coordenadas polares correspondiente a los puntos:
a) $P_1(0, -1)$ b) $P_2(2, -2\sqrt{3})$.

Solución.

a) Usando las relaciones de transformación (2) y (3), tenemos:

$$\begin{aligned} r &= \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{0^2 + (-1)^2} = \pm 1 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto el par de puntos en coordenadas polares son: $P_1\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ o $P_1\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$.

b) De las relaciones (2) y (3), tenemos:

$$\begin{aligned} r &= \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \pm 4 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto el par de puntos en coordenadas polares son: $P_1\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ o $P_1\left(-4, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Ecuaciones polares

Definición 1.1 Una ecuación polar es una expresión de la forma

$$F(r, \theta) = 0$$

donde $F(r, \theta)$ es una función que depende de los parámetros r y θ .

Cabe señalar que una ecuación en coordenadas cartesianas tendrá asociada una ecuación polar y recíprocamente.

Ejemplo 1.4 Halle la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación cartesiana es

$$x^2 - 4y - 4 = 0.$$

Solución.

Reemplazando las relaciones (1) y (2) en la ecuación dada, se obtiene

$$r^2 \cos^2 \theta - 4r \sin \theta - 4 = 0.$$

Ejemplo 1.5 Halle la ecuación cartesiana del lugar geométrico cuya ecuación polar es

$$r = \frac{4}{1 + 2 \cos \theta}.$$

Solución.

Primero es conveniente reescribir la ecuación dada en la forma

$$r = 4 - 2r \cos \theta.$$

Sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r \cos \theta = x$, tenemos

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - 2x.$$

Luego, elevando al cuadrado y efectuando operaciones se obtiene la ecuación rectangular de la hipérbola

$$x^2 - y^2/3 - 8x/3 + 16/3 = 0.$$

Ecuaciones equivalentes

Teniendo en cuenta que los pares ordenados (r, θ) y $((-1)^n r, \theta + n\pi)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ representan el mismo punto, se tiene la siguiente.

Definición 1.2 Decimos que dos ecuaciones en coordenadas polares $F(r, \theta) = 0$ y $G(r, \theta) = 0$ son equivalentes si cualquier punto que satisface a una de ellas satisface a la otra.

A partir de la definición podemos decir que dos ecuaciones equivalentes tienen la misma gráfica. Para determinar si las ecuaciones $F(r, \theta)$ y $G(r, \theta) = 0$ son equivalentes debemos sustituir (r, θ) por $((-1)^n r, \theta + n\pi)$ en una de ellas para obtener la otra.

Ejemplo 1.6 Las ecuaciones equivalentes a la ecuación polar $r = 3 + \cos \theta$ son de la forma

$$(-1)^n r = 3 + \cos(\theta + n\pi).$$

Es decir, $r = 3 + \cos \theta$ y $r = -3 + \cos \theta$ son equivalentes y por lo tanto describen el mismo lugar geométrico.

Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

La distancia d entre dos puntos cualesquiera en coordenadas polares $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ está dada por

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

La deducción de esta fórmula se puede realizar a partir de la figura 1.7 , usando la ley de cosenos.

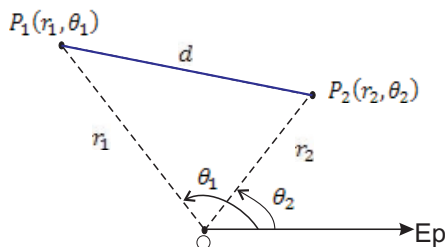


Figura 1.7:

Ejemplo 1.7 Calcule la distancia entre los puntos $P_1\left(-3, \frac{5\pi}{12}\right)$ y $P_2\left(5, \frac{\pi}{12}\right)$.

Solución.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-3)^2 + 5^2 - 2(-3)(5) \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)} \\ &= \sqrt{34 + 30 \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{34 + 30\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \sqrt{49} \\ &= 7. \end{aligned}$$

1.3. Ecuaciones polares y sus gráficas

1.3.1. Ecuación de la recta en coordenadas polares

Proposición 1.1 *La ecuación polar de una recta L que no pasa por el polo está dada por:*

$$L : \rho = r \cos(\theta - w). \quad (1.1)$$

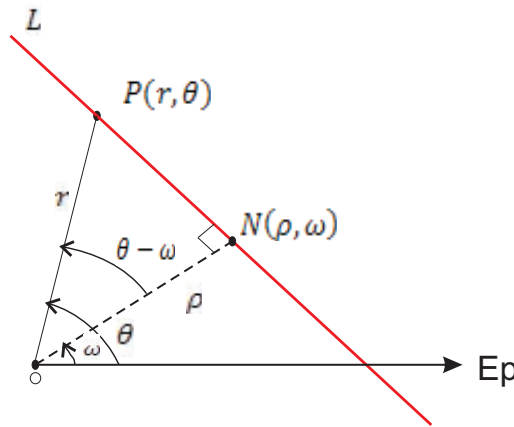


Figura 1.8:

En el triángulo ONP (ver figura 1.8) se verifica que

$$\rho = r \cos(\theta - \omega), \quad \rho > 0, \quad 0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$$

donde

ρ : Longitud de la perpendicular $\overline{ON}$

ω : ángulo de la normal $\overline{ON}$

$P(r, \theta)$: punto genérico de L

Los casos particulares de la ecuación (1.1) son las siguientes:

1. La ecuación polar de una recta que pasa por el polo $(0, \theta)$ es:

$$L : \theta = c, \quad 0 \leq c < \pi$$

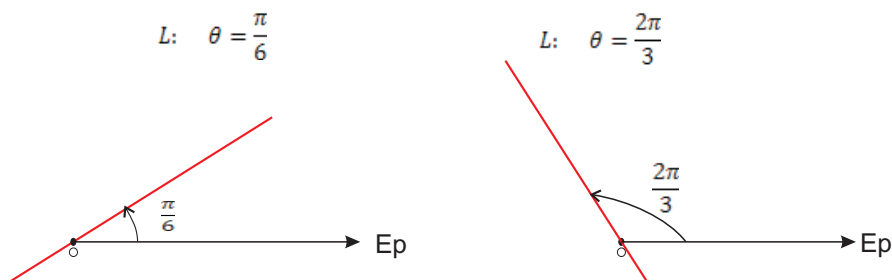


Figura 1.9:

2. La ecuación polar de una recta que es perpendicular al eje polar y está a ρ unidades del polo es:

$$\pm \rho = r \cos \theta, \quad \omega = 0 \quad \rho > 0$$

Si ρ tiene signo positivo, entonces la recta L se encuentra a la derecha del polo.

Si ρ tiene signo negativo, entonces la recta L se encuentra a la izquierda del polo.



Figura 1.10:

3. La ecuación polar de una recta que es paralela al eje polar y está a ρ unidades del polo es:

$$\pm \rho = r \sin \theta, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \rho > 0$$

Si ρ tiene signo positivo entonces la recta L se encuentra por arriba del eje polar.

Si ρ tiene signo negativo, entonces la recta L se encuentra abajo del eje polar.

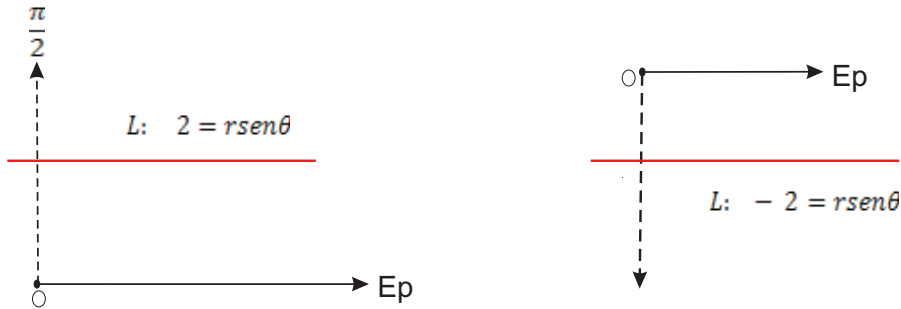


Figura 1.11:

1.3.2. Ecuación polar de una circunferencia

Proposición 1.2 La ecuación polar de una circunferencia con centro en el punto (ρ, α) , y radio a , $a > 0$ es:

$$\mathcal{C} : r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha) = a^2 \quad (1.2)$$

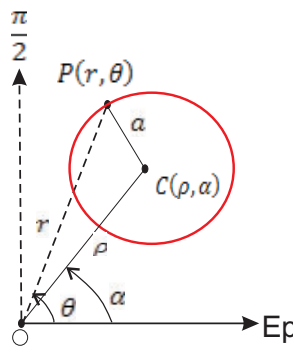


Figura 1.12:

Los casos particulares de la ecuación (1.2) son las siguientes:

1. La ecuación polar de una circunferencia con centro en el polo es:

$$\mathcal{C} : r = \pm a$$

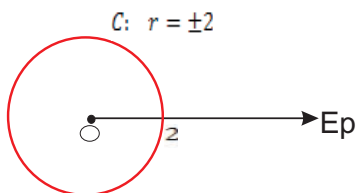


Figura 1.13:

2. La ecuación polar de una circunferencia que pasa por el polo y cuyo centro está sobre el eje polar es:

$$C : r = \pm 2a \cos \theta$$

El signo es +, si el centro está a la derecha del polo.

El signo es -, si el centro está a la izquierda del polo.

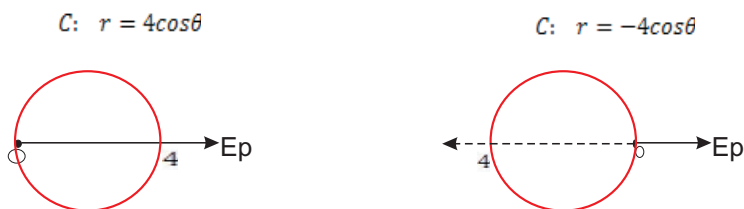


Figura 1.14:

3. La ecuación polar de una circunferencia que pasa por el polo y cuyo centro está sobre el eje a 90° es:

$$C : r = \pm 2a \operatorname{sen} \theta$$

El signo es +, si el centro está arriba del polo.

El signo es -, si el centro está abajo del polo.



Figura 1.15:

1.3.3. Ecuación general de las cónicas en coordenadas Polares

Definición 1.3 Sea L_D una recta fija en el plano y F un punto fijo no contenido en esa recta. Se llama **cónica** al conjunto de todos los punto P en el plano, tal que la razón de su distancia de P a F y la distancia de P a L_D es una constante positiva e . La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

La recta fija L_D se llama **directriz**, el punto fijo F , **foco**, y la constante positiva e , **excentricidad** de la cónica.

Teorema 1.3 Sea e la excentricidad de una cónica cuyo foco está en el polo y a p unidades de la recta directriz, L_D , correspondiente.

1.) Si el eje focal coincide con el eje polar, la ecuación de la cónica es de forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta}. \quad (1.3)$$

Se considera el signo $+$, si L_D está a la derecha del polo.

Se considera el signo $-$, si L_D está a la izquierda del polo.

2.) Si el eje focal coincide con el eje a $\frac{\pi}{2}$, la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \sen \theta}. \quad (1.4)$$

Se considera el signo $+$, si L_D está arriba del polo.

Se considera el signo $-$, si L_D está abajo del polo.

Prueba.

La demostración de los resultados en el teorema tienen un proceso similar, por lo que haremos uno de ellos.

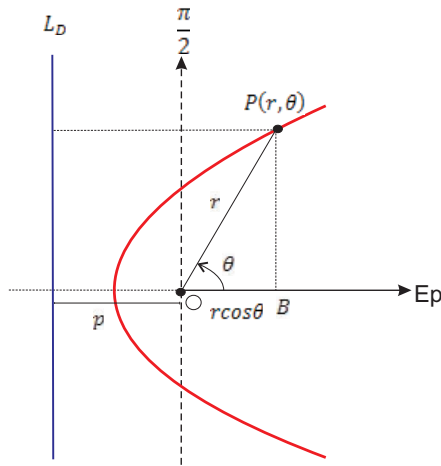


Figura 1.16:

Sea $P(r, \theta)$ un punto genérico de la cónica y L_D su recta directriz correspondiente al foco ubicado en el polo. Desde P trazamos las perpendiculares PB y PC al eje polar y a L_D respectivamente.

Según la definición general de cónica, el punto P debe satisfacer la condición

$$e = \frac{d(PQ)}{d(P, L_D)}. \quad (1.5)$$

Ahora, en la figura observamos que

$$d(PQ) = r$$

y

$$d(P, L_D) = d(D, O) + d(O, B) = p + r \cos \theta.$$

Entonces, sustituyendo estos valores en (1.5), obtenemos

$$e = \frac{r}{p + r \cos \theta}.$$

Lo que implica que

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}.$$

Ejemplo 1.8 Identifique la cónica cuya ecuación polar es

$$r = \frac{12}{2 + \cos \theta}.$$

Luego, halle las coordenadas polares del centro y vértice y las longitudes de los ejes y del lado recto.

Solución.

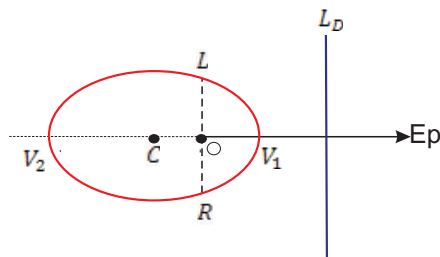


Figura 1.17:

Dividiendo por 2 tanto al numerador como al denominador de la ecuación dada, resulta

$$r = \frac{6}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}.$$

Ahora comparando con la ecuación (1.3), vemos que la excentricidad es $e = 1/2$ y por tanto, la cónica corresponde a una elipse. Además, de $ep = 6$ se deduce que $d = 12$.

Los puntos extremos del eje mayor encontramos haciendo $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Esto es, $V_1 (4, 0)$ y $V_2 (12, \pi)$, lo que implica que la longitud del eje mayor es $2a = d(V_1, V_2) = 16$ y $a = 8$.

El centro de la elipse es el punto medio $(4, \pi)$ del segmento que une V_1 y V_2 . Por otro lado, del hecho que $e = c/a$ se obtiene $c = 4$; y de la relación $a^2 = b^2 + c^2$ se obtiene $b = 4\sqrt{3}$. Por tanto la longitud del eje menor es $2b = \sqrt{6}$.

Haciendo $\theta = \pi/2$ se tiene $r = 6$, y así la longitud del lado recto es 12. Asimismo, de la relación $\frac{2b^2}{a} = 12$ se obtiene $b = 4\sqrt{3}$, por lo que la longitud del eje menor es $2b = \sqrt{6}$.

Ejemplo 1.9 Identifique la cónica y luego grafique

$$r = \frac{6}{1 - \sin \theta}.$$

Solución.

En este caso la excentricidad es $e = 1$ y por tanto la cónica representa una parábola. Por otro lado, de $ep = 6$ se obtiene $p = 6$.

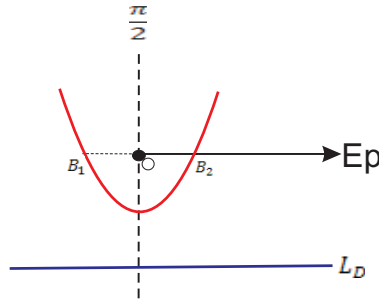


Figura 1.18:

Ejemplo 1.10 *Identifique la cónica cuya ecuación polar es*

$$r = \frac{6}{2 + 4 \cos \theta}.$$

Solución.

Dividimos por 2 tanto al numerador como al denominador de la ecuación dada para obtener

$$r = \frac{3}{1 + 2 \cos \theta}.$$

Luego, comparando con la ecuación (1.3), vemos que la excentricidad es $e = 2$. Por tanto, la cónica es una hipérbola. Además de $ep = 3$ se tiene $p = \frac{3}{2}$.

1.4. Trazado de curvas en coordenadas polares

En esta sección consideremos el trazado de curvas en coordenadas polares $F(r, \theta) = 0$. Para este propósito se recomienda realizar los pasos siguientes:

1. Intersecciones

a) Con el eje polar

Hacemos $\theta = 0$ para encontrar los valores de r .

Hacemos $\theta = \pi$ para encontrar los valores de r .

En general, podemos hacer $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Con el eje normal (Eje a $\frac{\pi}{2}$)

Hacemos $\theta = \pi/2$ para encontrar los valores de r .

Hacemos $\theta = 3\pi/2$ para encontrar los valores de r .

En general, podemos hacer $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Rectas tangentes al polo.

Estas son rectas tangentes a la curva y el punto de tangencia es el polo. Su forma general es $\theta = \theta_k$ (constante) y se determina haciendo $r = 0$ en la ecuación polar y luego resolviendo para θ .

3. Simetrías.

La prueba para averiguar la simetría de una curva de ecuación polar se resume en la siguiente tabla.

Simetría con respecto al:	La ecuación polar no se altera, o se transforma en una ecuación equivalente
Eje polar	a) se sustituye θ por $-\theta$, o b) se sustituye θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$
Eje a $\frac{\pi}{2}$	a) se sustituye θ por $\pi - \theta$, o b) se sustituye θ por $-\theta$ y r por $-r$
Polo	a) se sustituye θ por $\pi + \theta$, o b) se sustituye r por $-r$

En la figura ilustramos el resumen de la tabla.

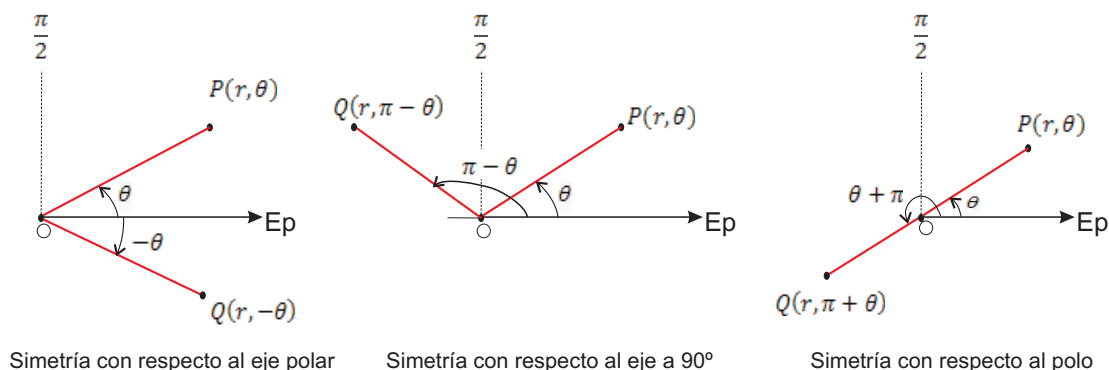


Figura 1.19:

4. Extensión.

Consiste en despejar r en función de θ ($r = f(\theta)$) y analizar la variación de r y θ .

- Si r es finito para todo los valores de θ , se trata de una curva cerrada.
- Si r es infinito para ciertos valores de θ , entonces la curva es abierta .

5. Tabulación.

Consiste en asignar valores particulares a θ para obtener el valor o valores reales correspondientes de r .

6. Trazado de la gráfica.

Con los valores de las coordenadas obtenidas en el paso 5 y mas la información obtenida en los pasos anteriores se procede a bosquejar la curva.

Ejemplo 1.11 *Discutir y graficar $r = 5(1 + \cos \theta)$.*

Solución.

1. Intersecciones.

a) Con el eje polar.

Si $\theta = 0$, entonces $r = 10$. Así, $P_1(10, 0)$.

Si $\theta = \pi$, entonces $r = 0$. Así, $P_1(0, \pi)$.

b) Con el eje Normal.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $r = 5$. Luego $P_3\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$.

Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$, entonces $r = 5$. Luego $P_4\left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Tangentes al polo.

Hacemos $r = 0$ en la ecuación dada y resulta $5(1 + \cos \theta) = 0$. Al resolver se tiene $\theta = \pi$.

3. Simetrías.

Notemos que $r = -5(1 - \cos \theta)$ es equivalente a la ecuación dada $r = 5(1 + \cos \theta)$.

Con el eje polar.

a) Reemplazamos θ por $-\theta$.

$r = 5(1 + \cos(-\theta)) = 5(1 + \cos \theta)$. Observamos que la ecuación dada no se altera, y por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje polar.

b) Reemplazar θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$, ya no es necesario realizar.

Con el eje Normal.

a) Reemplazamos θ por $\pi - \theta$.

$$r = 5(1 + \cos(\pi - \theta)) = 5(1 - \cos \theta).$$

b) Reemplazamos θ por $-\theta$ y r por $-r$.

$$-r = 5(1 + \cos(-\theta)) = 5(1 + \cos \theta)$$

Podemos observar que tanto en a) como en b) la ecuación dada se altera. Por lo tanto la curva no es simétrica con el eje normal

Con el Polo.

a) Reemplazamos θ por $\pi + \theta$.

$$r = 5(1 + \cos(\pi + \theta)) = 5(1 - \cos \theta)$$

b) Reemplazamos r por $-r$.

$$-r = 5(1 + \cos \theta).$$

Podemos observar que tanto en a) como en b) la ecuación dada se altera. Por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al polo.

4. Extensión.

Es inmediato ver que el valor máximo de r es 10 cuando $\theta = 0$ y su valor mínimo es 0 cuando $\theta = \pi$. Veamos:

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \cos \theta \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (1 + \cos \theta) \leq 10.$$

Lo que implica que $0 \leq r \leq 10$ para $\theta \in [0, 2\pi]$, y por lo tanto la curva es cerrada.

5. Tabulación.

Como la curva es simétrica con respecto al eje polar, es suficiente tomar valores de θ entre 0 y π .

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
r	10	9.3	8.5	7.5	5	2.5	0.67	0

6. Trazado de la curva.

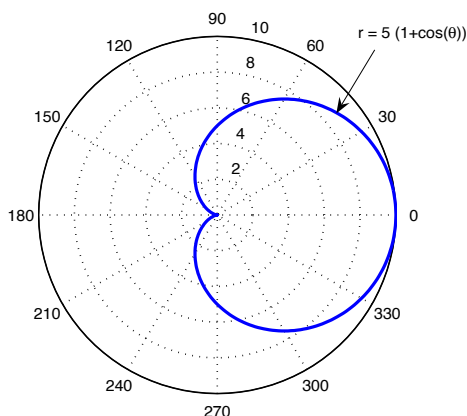


Figura 1.20:

Ejemplo 1.12 *Discutir y graficar $r^2 = 9 \cos(2\theta)$.*

Solución.**1. Intersecciones**

a) Con el eje polar.

Si $\theta = 0$, entonces $r = \pm 3$. Tenemos los puntos $(\pm 3, 0)$

Si $\theta = \pi$, entonces $r = \pm 3$. Tenemos los puntos $(\pm 3, \pi)$.

b) Con el eje Normal.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene r complejo, por lo que no hay intersección con el eje normal.

Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$, se tiene r complejo, por lo que no hay intersección con el eje normal.

2. Tangentes al polo.

Hacemos $r = 0$ en la ecuación dada y resulta $9 \cos^2 2\theta = 0$. Al resolver se tiene $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$, y $7\pi/4$.

3. Simetrías.

Con el eje polar.

a) Reemplazamos θ por $-\theta$.

$r^2 = 9 \cos(2(-\theta)) = 9 \cos(2\theta)$. Observamos que la ecuación dada no se altera, y por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje polar.

b) Sustituir θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$, ya no es necesario realizar.

Con el eje Normal.

a) Reemplazamos θ por $\pi - \theta$.

$$r^2 = 9 \cos(2(\pi - \theta)) = 9 \cos(2\theta)$$

b) Reemplazamos θ por $-\theta$ y r por $-r$.

$$(-r)^2 = 9 \cos(2(-\theta)) \text{ implica } r^2 = 9 \cos(2\theta)$$

Podemos observar que tanto en a) como en b) la ecuación dada no se altera.

Por lo tanto la curva es simétrica con el eje normal.

Con el Polo.

a) Reemplazamos θ por $\pi + \theta$.

$$r^2 = 9 \cos(2(\pi + \theta)) = 9 \cos(2\theta)$$

b) Reemplazamos r por $-r$.

$$(-r)^2 = 9 \cos(2\theta) \text{ implica } r^2 = 9 \cos(2\theta)$$

Podemos observar que tanto en a) como en b) la ecuación dada no se altera.

Por lo tanto la curva es simétrica con respecto al polo.

4. Extensión.

El valor de r alcanza un máximo para $\theta = 0$ ya que $\cos 0 = 1$, con lo que $r = 3$. Lo que implica que la curva es cerrada. Por otro lado, cuando el ángulo 2θ está comprendida entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, $\cos 2\theta$ es negativo y los valores de r son complejos. Por consiguiente, no hay curva entre las rectas $\theta = \pi/4$ y $3\pi/4$.

La variación de r se determina como sigue:

$$-1 \leq \cos 2\theta \leq 1 \Rightarrow -9 \leq 9 \cos 2\theta \leq 9 \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 9$$

Esto implica que

$$-3 \leq r \leq 3 \quad y \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4 \quad y \quad 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi.$$

5. Tabulación.

Teniendo en cuenta la simetría de la curva y el intervalo de variación de los valores excluidos de θ , asignaremos valores a θ entre 0 y $\pi/4$.

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$
$\cos 2\theta$	1	0.806	0.5	0
r	± 3	$\pm 2,8$	$\pm 2,1$	0

6. Trazado de la curva.

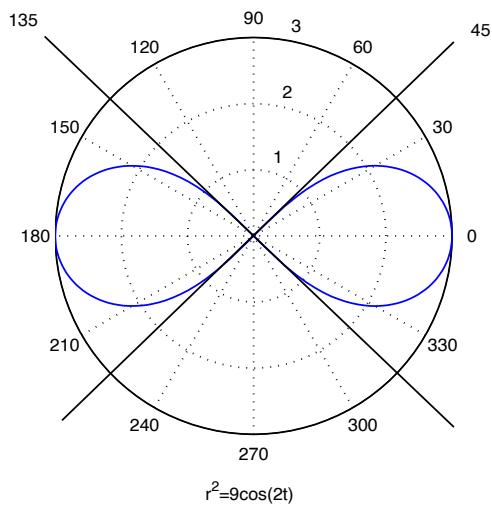


Figura 1.21:

Gráfica de algunas curvas especiales

Rosas

La gráfica de la ecuación polar de la forma

$$r = a \cos(n\theta) \quad \text{o} \quad r = a \operatorname{sen}(n\theta)$$

para todo n entero positivo mayor que 1 y para todo número a real diferente de cero es una rosa que tiene varios pétalos que parten del polo. Si n es par tiene $2n$ pétalos; en cambio si n es impar tiene n pétalos.

Ejemplo 1.13 En las figuras 1.22 y 1.23 se muestran algunas rosas.

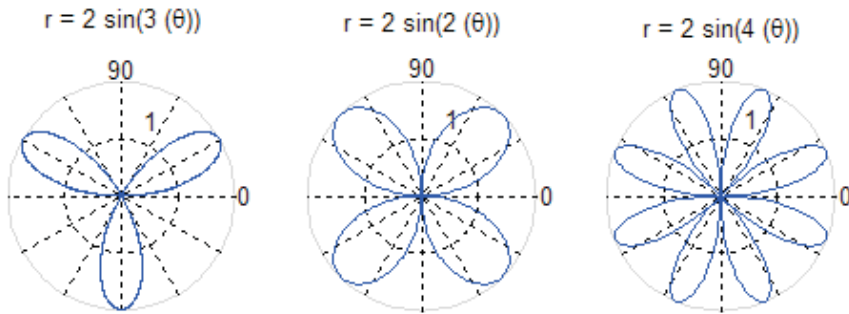


Figura 1.22:

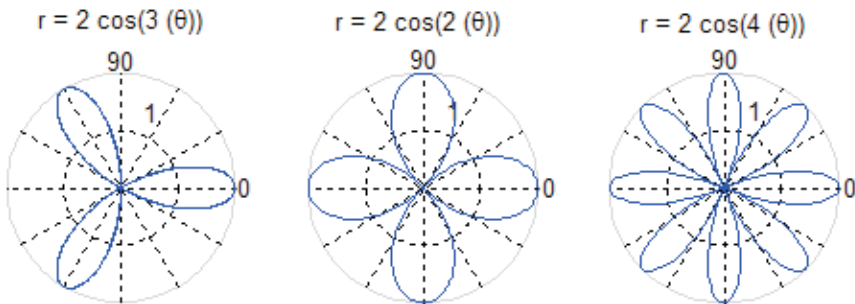


Figura 1.23:

Caracoles

La gráfica de cualquier ecuación polar de la forma

$$r = a + b \operatorname{sen} \theta \quad \text{o} \quad r = a + b \cos \theta$$

tal que:

1. $|a| < |b|$, $a \neq 0$, son caracoles que tienen un lazo.
2. $\frac{a}{b} = 1$, son cardioides.

3. $1 < \frac{a}{b} < 2$, son caracoles con hendidura.

4. $2 \leq \frac{a}{b}$, son caracoles convexos.

Ejemplo 1.14 En las figuras 1.24 y 1.25 se muestran caracoles con lazo interior: $0 < \frac{a}{b} < 1$

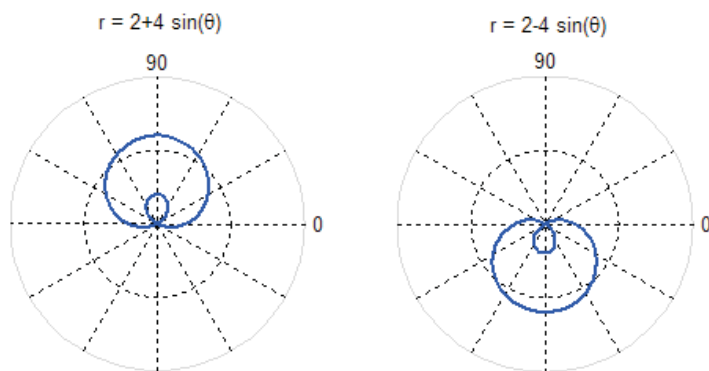


Figura 1.24:

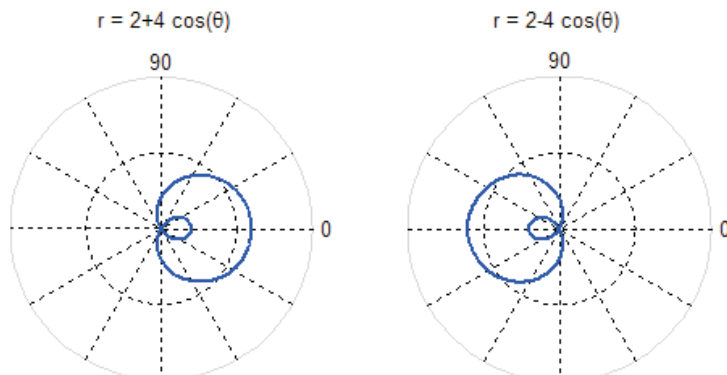


Figura 1.25:

Ejemplo 1.15 En las figuras 1.26 y 1.27 se muestran las cardioides: $a = b$

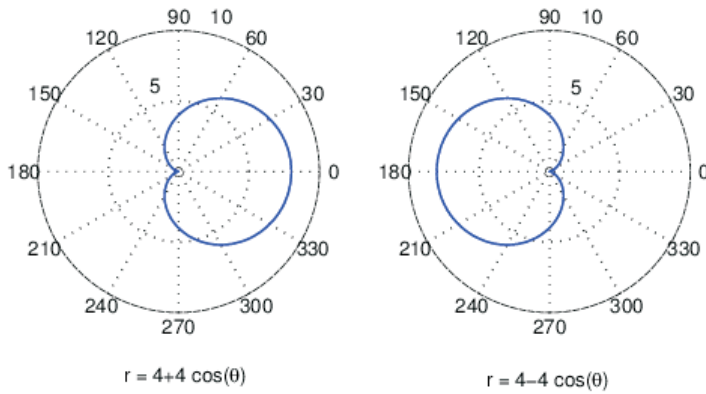


Figura 1.26:

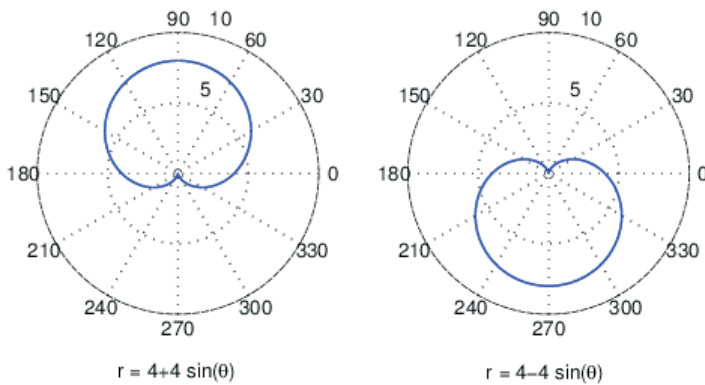


Figura 1.27:

Ejemplo 1.16 En las figuras 1.28 y 1.29 se muestran caracoles con endidura: $1 < \frac{a}{b} < 2$

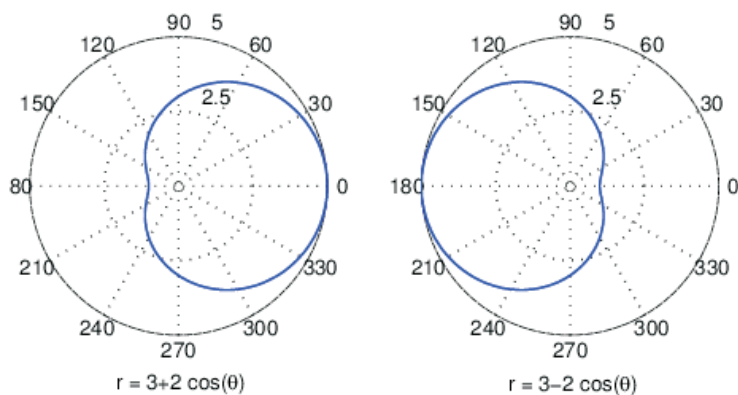


Figura 1.28:

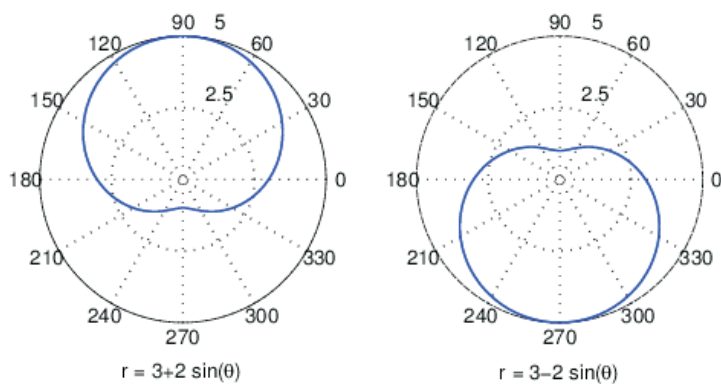


Figura 1.29:

Ejemplo 1.17 En las figuras 1.30 y 1.31 se muestran caracoles convexos: $2 \leq \frac{a}{b}$

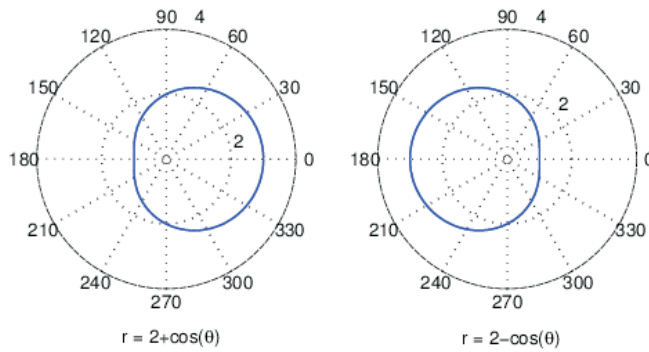


Figura 1.30:

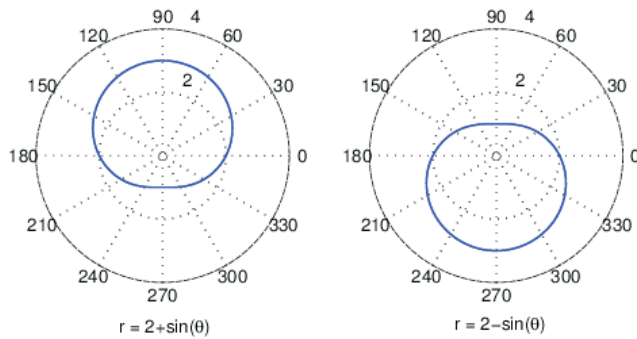


Figura 1.31:

Lemniscata

La gráfica de la ecuación polar de la forma:

$$r^2 = \pm a^2 \operatorname{sen}(2\theta) \quad \text{o} \quad r^2 = \pm a^2 \cos(2\theta)$$

se llaman **Lemniscatas**.

Ejemplo 1.18 En las figuras 1.32 y 1.33 se muestran algunas lemniscatas.

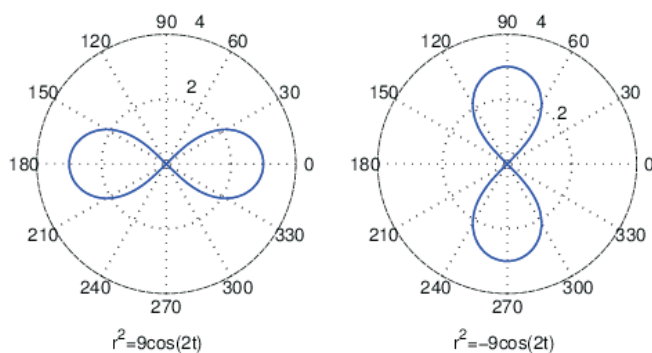


Figura 1.32:

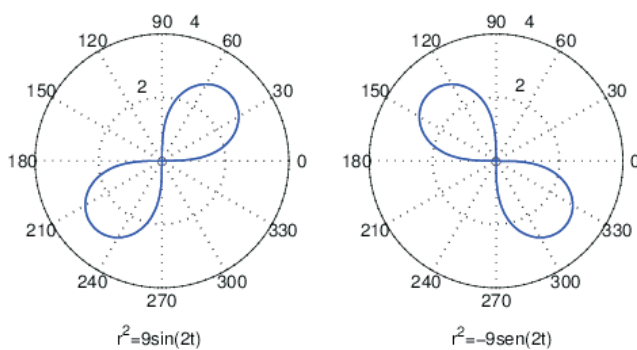


Figura 1.33:

Espiral de Arquímedes

La curva representada por la ecuación $r = a\theta$, donde a es una constante, es llamada la **espiral de Arquímedes**.

Espiral logarítmica

La curva representada por la ecuación $r = ae^{b\theta}$, donde a y b son constantes, es llamada la **espiral logarítmica**.

En la figura 1.34 se muestran las curvas: $r = 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $r = e^{\theta/6}$, $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

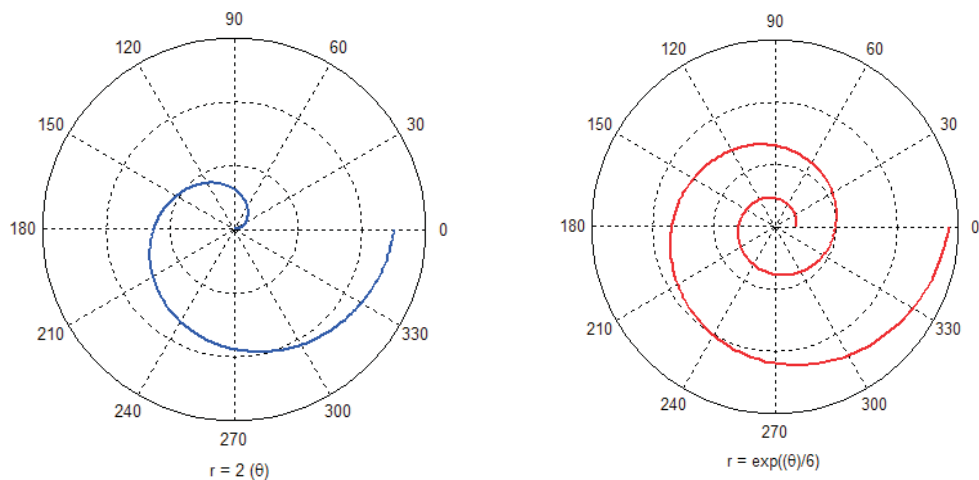


Figura 1.34:

1.5. Intersección de curvas en coordenadas polares

El método para obtener los puntos de intersección de dos curvas en coordenadas polares es semejante al empleado en coordenadas cartesianas. Las soluciones del sistema formado por las ecuaciones $F(r, \theta) = 0$ y $G(r, \theta) = 0$, representan las coordenadas (r, θ) de los puntos de intersección; sin embargo debido a que las coordenadas polares de un punto no son únicas, un punto particular P de intersección de dos curvas, las coordenadas polares de P que satisfacen la ecuación de una de las curvas no satisfagan la ecuación de la otra, pero satisfagan a una de sus ecuaciones equivalentes. Para evitar estas dificultades, es recomendable graficar ambas curvas con referencia al mismo polo y eje polar y considerar cada punto de intersección individualmente.

Ejemplo 1.19 *Determine los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son: $r^2 = 2 \cos(2\theta)$, $r = -2 \operatorname{sen} \theta$.*

Solución.

Denotando a las ecuaciones dadas como $r_1^2 = 2 \cos(2\theta)$ y $r_2 = -2 \operatorname{sen} \theta$, y luego elevando al cuadrado al segundo igualamos $r_1^2 = r_2^2$. Efectuando operaciones tenemos

$$2(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta) = 4 \operatorname{sen}^2 \theta \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{1}{2}.$$

Los valores de θ que satisfacen las ecuaciones dadas son $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. Sustituyendo estos valores en una de las ecuaciones nos da $r = 1$. De esta forma los puntos de intersección entre las dos curvas son $P_1(1, \frac{7\pi}{6})$ y $P_2(1, \frac{11\pi}{6})$.

Ahora, veamos si las curvas dadas pasan por el polo. Para esto hacemos $r = 0$ en cada ecuación y tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cos(2\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}. & \text{Luego, } P_3\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \\ 0 &= -2 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \theta = 0. & \text{Luego, } P_4(0, 0) \end{aligned}$$

De esto se concluye que ambas curvas pasan por el polo. (Véase figura 1.35)

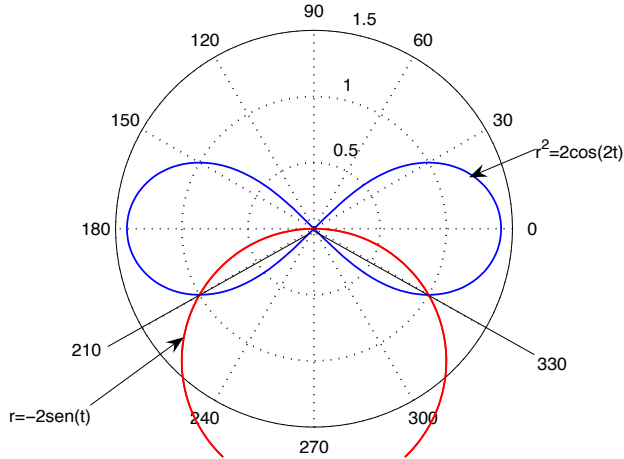


Figura 1.35:

Ejemplo 1.20 Determine los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son: $r = 3\text{sen}\theta$, $r = 1 + \text{sen}\theta$.

Solución.

Igualando las dos ecuaciones resolvemos para θ , Esto es,

$$3\text{sen}\theta = 1 + \text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

Los valores de θ que satisfacen las ecuaciones son $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. Reemplazando estos valores en una de las ecuaciones nos da $r = 3/2$. De esta forma los puntos de intersección entre las dos curvas son $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ y $P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Falta ver si las curvas pasan por el polo. Para esto hacemos $r = 0$ y se determina θ en cada ecuación.

$$0 = 3\text{sen}\theta \Rightarrow \theta = 0. \quad \text{Luego, } P_3(0, 0).$$

$$0 = 1 + \text{sen}\theta \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}. \quad \text{Luego, } P_4\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Esto comprueba que ambas curvas pasan por el polo. (Veáse figura 1.36)

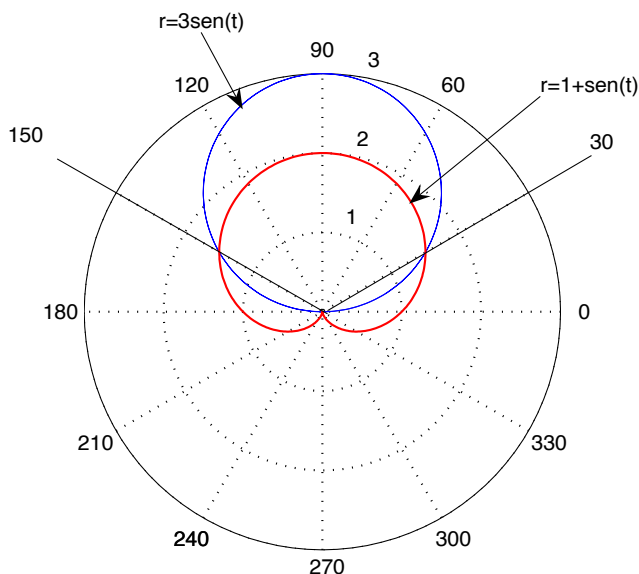


Figura 1.36:

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un sistema polar grafique los puntos dados y luego encuentre para cada punto tres pares de coordenadas polares equivalentes.

a) $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ b) $\left(4, -\frac{7\pi}{3}\right)$ c) $\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$ d) $\left(-6, -\frac{5\pi}{3}\right)$
 e) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

2. Exprese en coordenadas polares ($r \geq 0$) los puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(-1, 1)$ b) $(2\sqrt{3}, -2)$ c) $(-1, -\sqrt{3})$ d) $(0, -5)$ e) $(3, 0)$

3. Exprese las ecuaciones cartesianas dadas a su forma polar.

a) $x^2 + y^2 = 36$

b) $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$

- c) $x^2 - 9y - 9 = 0$
d) $xy = 4$
4. Exprese en coordenadas cartesianas las siguientes ecuaciones.
- a) $r \operatorname{sen} \theta = 2$
b) $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$
c) $r = \frac{3}{2 - 4 \cos \theta}$
d) $r - r \cos \theta = 4$
e) $\operatorname{sen}^2 \theta - 4r \cos^2 \theta = 0$
5. Determine qué cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones polares y haga un bosquejo de la gráfica identificando los elementos correspondientes.
- a) $r = \frac{5}{2 - 2 \cos \theta}$
b) $r = \frac{8}{3 + \operatorname{sen} \theta}$
c) $r = \frac{3}{2 + 4 \cos \theta}$
d) $r = \frac{4}{2 - \operatorname{sen} \theta}$
6. Discutir y graficar las siguientes curvas.
- a) $r = 4 \cos \theta$
b) $r = 6 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$
c) $r = 3 + 6 \cos \theta$
d) $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$
e) $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$
f) $r = 2(1 - \cos \theta)$
g) $r^2 = 4 \cos(2\theta)$
h) $r = \frac{\pi}{\theta}, \theta > 0$

7. Encuentre todos los puntos de intersección entre las siguientes parejas de curvas.

a) $r = \operatorname{sen}\theta$, $r = \cos\theta$

b) $r = \pi/4$, $r = 3$

c) $r = 2\operatorname{sen}\theta$, $r = 1$

d) $r^2 = 9\cos 2\theta$, $r = 3\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$

e) $r^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$, $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$

g) $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

h) $r - 2r\cos\theta = 1$, $r = \operatorname{sen}\theta$

8. Realice el bosquejo de las curvas dadas en el ejercicio 7.

Integración Numérica

2.1. Preliminares

Definición 2.1 (Partición) Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado con $a < b$. El conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ es denominada una *partición* de $[a, b]$ si

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

y los x_i no necesariamente equidistantes.

Definición 2.2 (Norma de una partición) Se llama *norma* de la partición P de $[a, b]$, al número

$$\|P\| = \max \{\Delta x_i / i = 1, 2, \dots, n\},$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ es la longitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Definición 2.3 (Suma de Riemann) Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2, \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

donde Δx_i es la longitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si ξ_i es cualquier punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces la suma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

es llamado **suma de Riemann** de f para la participación P .

Definición 2.4 (La integral definida como un límite de Sumas) Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de la suma de Riemann sobre la partición P

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

existe, entonces decimos que f es Riemann-**integrable** en $[a, b]$ y el límite es denotada por

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 2.1 Toda función continua definida sobre un intervalo cerrado de la recta real es Riemann-integrable.

Teorema 2.2 Si f es continua y positiva sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es dada por

$$\text{Area} = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 2.3 (Segundo teorema fundamental o regla de Barrow.) Si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada cualquiera de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 2.4 (Teorema del valor medio para integrales.) Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

El valor $f(c)$ se llama **valor promedio** de la función en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2.1 Encuentre todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales, para la función $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$ en el intervalo $I = [0, 2.5]$.

Solución.

La gráfica de f que se muestra en la figura 2.1 indica que podría haber tres valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales.

Una antiderivada de $f(x)$ es $F(x) = -\cos(x) - \frac{1}{9}\cos(3x)$. El valor promedio de la función en el intervalo I es

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{2.5 - 0} \int_0^{2.5} f(x) dx = \frac{F(2.5) - F(0)}{2.5} \\ &= \frac{1.873740}{2.5} = 0.749496. \end{aligned}$$

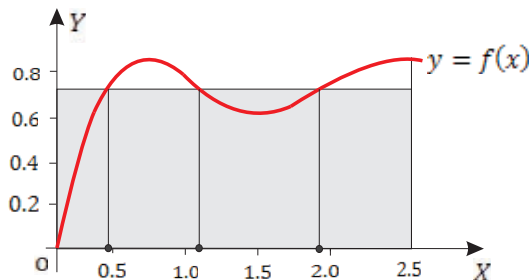


Figura 2.1:

Al resolver la ecuación $f(c) = 0.749496$ en el intervalo I , encontramos tres valores $c_1 = 0.440566$, $c_2 = 1.268010$ y $c_3 = 1.873583$. Así, el área del rectángulo de base $b - a = 2.5$ y altura $f(c_i) = 0.749496$ es $f(c_i)(b - a) = 1.873740$. El área del rectángulo es lo mismo que la integral de $f(x)$ en el intervalo I , que a su vez es el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ sobre dicho intervalo I .

Ejemplo 2.2 *Se inyecta una dosis de 3 miligramos de cierta droga en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad de droga que queda en la sangre después de t horas está dada por $f(t) = 3e^{-0.32t}$.*

a) *Encuentre la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo durante la segunda hora.*

b) *Determine el hora aproximada en que ocurre la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo, sabiendo que se inyectó a las 10:00 am.*

Solución.

a) Debemos encontrar el valor promedio $f(t)$ en el intervalo $[1, 2]$. Por el teorema del valor medio para integrales, la cantidad promedio es

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{2-1} \int_1^2 3e^{-0.32t} dt \\ &= \left(\frac{3}{-0.32} \right) e^{-0.32t} \Big|_1^2 \\ &= 1.8643. \end{aligned}$$

La cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo es de aproximadamente 1.8643 miligramos.

b) El tiempo, $t = c$, se determina al resolver la ecuación $f(c) = 1.8643$. En efecto,

$$\begin{aligned} 3e^{-32c} &= 1.8643 \\ c &= -\frac{1}{0.32} \ln\left(\frac{1.8643}{3}\right) \approx 1.486 \in [1, 2] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la hora aproximada en que ocurrió la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo fue a las 11.00 horas con 49 min aproximadamente.

Errores

Los errores numéricos surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas. Éstas incluyen los errores de truncamiento y los errores de redondeo

Error de truncamiento

La noción de error de truncamiento generalmente se refiere a errores introducidos cuando una expresión matemática más complicada se reemplaza con una fórmula más elemental. Esta terminología se origina en la técnica de reemplazar una función complicada con una serie de Taylor truncada.

Error de redondeo

Los errores de redondeo surgen normalmente al usar una calculadora o computadora para cálculos con números reales, esto se debe a que la aritmética de la máquina sólo utiliza números con una cantidad finita de cifras, es decir los cálculos se realizan únicamente con representaciones aproximadas de los números verdaderos. Por ejemplo, los números π , e o $\sqrt{3}$ no pueden ser representados exactamente por la computadora.

En la siguiente definición se describen dos métodos para medir errores de aproximación.

Definición 2.5 Supongamos que x^* es una aproximación de x . El **error absoluto** de la aproximación es $E_x = |x - x^*|$ y el error relativo es $R_x = \frac{|x - x^*|}{|x|}$, siempre que $x \neq 0$.

Por ejemplo, si $x = 2.71828182$, $x^* = 2.7182$, entonces

$$E_x = |x - x^*| = 2.71828182 - 2.7182 = 8.182 \times 10^{-5}$$

y

$$R_x = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{2.71828182 - 2.7182}{2.71828182} = 3.0100 \times 10^{-5}.$$

El Teorema de Taylor

La mayoría de los estudiantes habrán encontrado series infinitas (particularmente series de Taylor) en su estudio de cálculo sin haber adquirido necesariamente una buena comprensión de este tema. En consecuencia, esta sección es particularmente importante ya que es punto de partida para el análisis numérico y merece un estudio cuidadoso.

Teorema 2.5 (Teorema de Taylor.) *Supongamos que $f \in C^{n+1}[a, b]^1$. Entonces para cualquier x_0 y x en $[a, b]$, existe un punto $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

y

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}.$$

En este caso, $P_n(x)$ es el n -ésimo **polinomio de Taylor** para f alrededor de x_0 , y $R_n(x)$ se llama el **término del residuo** (o **error de truncamiento**) asociado a $P_n(x)$. La serie infinita obtenida al tomar el límite de $P_n(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$, es la **serie de Taylor** para f en torno a x_0 .

¹Denotamos por $f \in C^{n+1}[a, b]$ el conjunto de todas las funciones f tales que f y sus primeras $n+1$ derivadas son continuas en $[a, b]$.

Ejemplo 2.3 Obtenga el polinomio de Taylor de tercer grado $P_3(x)$ para la función $f(x) = (x-1)\ln x$ alrededor de $x_0 = 1$. Luego,

- a) use $P_3(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$.
- b) encuentre una cota superior para el error $|f(0.5) - P_3(0.5)|$ por medio de la fórmula de error y compárela con el error real.

Solución.

El polinomio de tercer grado de Taylor alrededor de x_0 es

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3.$$

Calculando las derivadas respectivas

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-1}{x} + \ln x & f'''(x) &= -2x^{-3} - x^{-2} \\ f''(x) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} & f^{(4)}(x) &= 6x^{-4} + 2x^{-3} \end{aligned}$$

y luego reemplazando en $x_0 = 1$, el polinomio es

$$P_3(x) = (x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{2}.$$

a) $P_3(0.5) = 0.3125$ aproxima a $f(0.5) = 0.3465$.

b) El error real es $|f(0.5) - P_3(0.5)| = 0.034$.

Usando la fórmula del error en $x = 0.5$ y con ξ entre 0.5 y 1 tenemos:

$$f^{(4)}(\xi) = 6\xi^{-4} + 2\xi^{-3} = \frac{6}{\xi^4} + \frac{2}{\xi^3}$$

$$\begin{aligned} |R_3(0.5)| &= \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (0.5-1)^4 \right| \\ &\leq \frac{1}{16(4!)} \left| \frac{6}{\xi^4} + \frac{2}{\xi^3} \right| \\ &< \frac{1}{16(4!)} [6(16) + 2(8)] \\ &= 0.29. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4 Sea $f(x) = \ln x$ y $x_0 = 1$.

- a) Encuentre el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para $f(x)$ respecto a x_0 .
- b) Encuentre el valor necesario n de $P_n(x)$ para aproximar $f(2)$ dentro de 10^{-4} en $[1, 2]$.

Solucion.

Calculando las derivadas

$f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f^{(3)} = 2x^{-3}$, ..., $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! x^{-k}$,
 $k \geq 1$, tenemos:
 a)

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}(x-1)^n \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n+1)!} (-1)^n n! \xi^{-(n+1)} (x-1)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} \xi^{-(n+1)} (x-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{n+1} \xi^{-(n+1)} (x-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \xi^{-(n+1)} (x-1)^{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n+1} (x-1)^{n+1} \end{aligned}$$

esto es por que $1 < \xi$.

Para $x = 2$, se quiere

$$|R_n(2)| \leq \frac{1}{n+1} \leq 10^{-4},$$

o sea $n+1 \geq 10^4$. Lo que implica que para lograr esa precisión se requerirá un polinomio con 10^4 términos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $f(x) = x^3$.
 - a) Determine el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ en torno a $x_0 = 0$.
 - b) Encuentre una cota superior de $R_2(0.5)$ y el error real al usar $P_2(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$.
 - c) Repita el inciso (a) usando $x_0 = 1$.
2. Sea $f(x) = (2+x)^{1/2}$.
 - a) Halle el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de $f(x)$ alrededor de $x_0 = 2$.
 - b) Use $P_3(x)$ para hallar una aproximación a $\sqrt{3}$.
 - c) Si $x \in [1, 3]$, encuentre una cota de $|R_3(x)|$.
3. Sea $f(x) = \ln x$ y $x_0 = 1$.
 - a) Encuentre el polinomio de grado n de Taylor $P_n(x)$ para $f(x)$ respecto a x_0 .
 - b) Encuentre el valor necesario n de $P_n(x)$ para aproximar $f(2)$ dentro de 10^{-4} en $[1, 2]$.
4. Determine el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ para la función $f(x) = e^x \cos x$ en torno a $x_0 = 0$.
 - a) Use $P_2(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Determine una cota superior para el error
$$|f(0.5) - P_2(0.5)|$$
por medio de la fórmula para el error y compárelo con el error real.
 - b) Calcule una cota para el error $|f(x) - P_2(x)|$ al usar $P_2(x)$ para aproximar $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.
 - c) Aproxime $\int_0^1 f(x) dx$ por medio de $\int_0^1 P_2(x) dx$
 - d) Calcule una cota superior para el error en (c) mediante $\int_0^1 |R_2(x)| dx$ y compárela con el error real.
5. Repita el ejercicio 2 con $x_0 = \pi/6$.

2.2. Integración numérica

La integración numérica es una herramienta fundamental que se usa en las ciencias y la ingeniería para obtener valores lo más aproximado posible de integrales definidas $\int_a^b f(x) dx$ que no pueden calcularse analíticamente. Es decir, se necesita cuando:

1. La función $f(x)$ sólo se conoce en puntos concretos.
2. No se conoce la primitiva de la función $f(x)$.
4. Aunque se conozca la primitiva de la función, su cálculo es tan costoso que es mejor usar un método aproximado para calcularla.
5. Otras causas.

En esta sección revisaremos las sumas de Riemann como una forma de aproximar una integral definida y posteriormente presentaremos las fórmulas de integración de Newton - Cotes.

2.2.1. Aproximación de una integral por sumas de Riemann

Suponga que f está definida en $[a, b]$ y $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ es una partición regular de $[a, b]$, esto es, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ para toda i . Entonces la suma de Riemann está dada como

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Consideraremos tres casos en el que el punto ξ_i es el extremo izquierdo, extremo derecho o punto medio del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. (Veáse la figura 2.2)

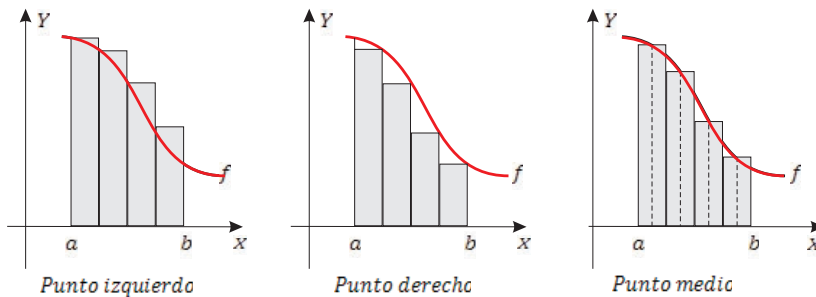


Figura 2.2:

Suma de Riemann del punto izquierdo.

Si $\xi_i = x_{i-1} = a + (i-1) \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + (i-1) \frac{b-a}{n}\right). \quad (2.1)$$

Suma de Riemann del punto derecho.

Si $\xi_i = x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right). \quad (2.2)$$

Suma de Riemann del punto medio.

Si $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right). \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.5 Aproxime las integral definida $\int_1^3 (x^2 + 2)^{-1} dx$, por medio de las sumas de Riemann del punto izquierdo, derecho y del punto medio con $n = 4$.

Solución.

Sea $f(x) = (x^2 + 2)^{-1}$. Tenemos $a = 1$, $b = 3$ y $n = 4$, por lo que $\Delta x = \frac{b-a}{n} = 0.5$. Los valores de $x_{i-1} = 1 + (i-1) \frac{1}{2}$ y $f(x_{i-1})$ para $i = 1, 2, 3, 4$ se recogen en la siguiente tabla:

i	1	2	3	4
x_{i-1}	$x_0 = 1$	$x_1 = 1.5$	$x_3 = 2$	$x_4 = 2.5$
$f(x_{i-1})$	0.3333	0.2353	0.1667	0.1212

Mediante la suma de Riemann del punto izquierdo tenemos la siguiente aproximación

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (x^2 + 2)^{-1} dx &\approx 0.5 (f(x_0) + f(x_1) + f(x_3) + f(x_4)) \\
&= 0.5 (f(1) + f(1.5) + f(2) + f(3)) \\
&\approx 0.5 (0.3333 + 0.2353 + 0.1667 + 0.1212) \\
&\approx 0.4228.
\end{aligned}$$

Para la suma de Riemann del punto derecho, con $x_i = 1 + i\frac{1}{2}$ y $f(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$, tenemos la siguiente aproximación.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (x^2 + 2)^{-1} dx &\approx 0.5 (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) \\
&= 0.5 (f(1.5) + f(2) + f(2.5) + f(3)) \\
&\approx 0.5 (0.2353 + 0.1667 + 0.1212 + 0.0909) \\
&\approx 0.3071
\end{aligned}$$

Por último para la suma de Riemann del punto medio, con $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ y $f(\xi_i)$ para $i = 1, 2, 3$ y 4 , tenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (x^2 + 2)^{-1} dx &\approx 0.5 \left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) \right) \\
&= 0.5 (f(1.25) + f(1.75) + f(2.25) + f(2.75)) \\
&\approx 0.5 (0.2807 + 0.1976 + 0.1416 + 0.1046) \\
&\approx 0.3623.
\end{aligned}$$

Vistos los resultados, la aproximación por sumas de Riemann de punto medio resultó ser la más cercana al valor real 0.36402 obtenido con el teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo 2.6 Aproxime las integral definida $\int_0^2 \cos x^2 dx$, por medio de las sumas de Riemann del punto derecho con $n = 8$.

Solución.

Sea $f(x) = \cos x^2$. Tenemos $a = 0$, $b = 2$ y $n = 8$, por lo que $\Delta_x = \frac{1}{4}$

Mediante la suma de Riemann de punto derecho tenemos la siguiente aproximación

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \cos x^2 dx &\approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 f\left(i \frac{1}{4}\right) \\
 &= 0,25 [f(0,25) + f(0,5) + f(0,75) + f(1) \\
 &\quad + f(1,25) + f(1,5) + f(1,75) + f(2)] \\
 &= 0,25 [\cos(0,25)^2 + \cos(0,5)^2 + \cos(0,75)^2 + \cos(1)^2 \\
 &\quad + \cos(1,25)^2 + \cos(1,5)^2 + \cos(1,75)^2 + \cos(2)^2] \\
 &\approx 0,2707.
 \end{aligned}$$

2.2.2. Fórmulas de integración de Newton-Cotes

Debidas a Newton y Roger Cotes, Inglaterra, 1682-1716.

Las fórmulas de Newton-Cotes son los tipos de integración numérica clásicas. Consiste en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar, o sea

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx,$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n .

Existen formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton-Cotes. En este texto, se recogen solamente las fórmulas cerradas² al utilizar polinomios de aproximación de grado $n = 1, 2$ y 3 ; y que se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Supongamos que $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) son nodos igualmente espaciados y sea $f_k = f(x_k)$ para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Las tres primeras fórmulas cerradas de Newton-Cotes son:*

1. *Regla del Trapecio*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1). \quad (2.4)$$

2. *Regla 1/3 de Simpson*

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2). \quad (2.5)$$

²Las formas cerradas son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración.

3. Regla 3/8 de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3). \quad (2.6)$$

Prueba.

La regla del trapecio corresponde a $n = 1$. (Veáse la figura 2.3)

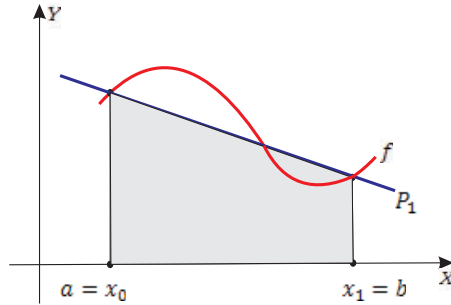


Figura 2.3:

Sea f una función definida en el intervalo $[x_0, x_1]$ tal que $f_0 = f(x_0)$ y $f_1 = f(x_1)$. Entonces el polinomio de interpolación de grado uno, que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ es

$$P_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Como f_0 y f_1 son constantes al momento de integrar, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) dx \\ &= f_0 \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1) dx + f_1 \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) dx \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2} (f_0 + f_1) \\ &= \frac{h}{2} (f_0 + f_1). \end{aligned}$$

El caso $n = 2$ corresponde a la regla de Simpson (veáse la figura 2.4).

En este caso el polinomio de interpolación de grado dos, es

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

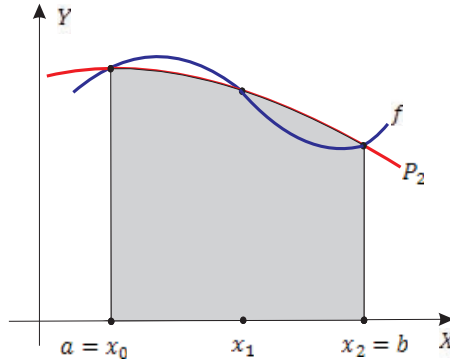


Figura 2.4:

Puesto que f_0 , f_1 y f_2 son constantes al momento de integrar, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\approx f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx \\ &\quad + f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx \end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $x = x_0 + th$ de modo que $dx = hdt$. Como los nodos $x_k = x_0 + kh$ están equiespaciados, podemos escribir $x_k - x_j = (k-j)h$ y $x - x_k = h(t-k)$; y luego introducimos esto para simplificar las integrales y así

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\approx \frac{hf_0}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt - hf_1 \int_0^2 (t^2 - t) dt + \frac{hf_2}{2} \int_0^2 (t^2 - t) dt \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2). \end{aligned}$$

La prueba para $n = 3$, se realiza en forma similar a partir del polinomio interpolador de Lagrange de grado tres.

Corolario 2.6.1 (Precisión de las fórmulas de Newton-Cotes.) *Supongamos que f es suficientemente derivable, entonces el término del error de truncamiento, E , de las fórmulas de Newton-Cotes contienen una derivada de orden superior evaluada en un cierto punto $\xi \in (a, b)$.*

1. La regla del trapecio tiene un grado de precisión de $n = 1$ y si $f \in C^2[a, b]$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + E,$$

donde $E = -\frac{h^3}{12}f^{(2)}(\xi)$, $x_0 < \xi < x_1$. Además, el valor absoluto del error de truncamiento satisface la relación:

$$|E| \leq \frac{h^3}{12} [\max |f''(x)|], \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

2. La regla de Simpson 1/3 tiene un grado de precisión de $n = 3$ y si $f \in C^4[a, b]$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) + E,$$

donde $E = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$, $x_0 < \xi < x_2$. Además, el valor absoluto del error de truncamiento satisface la relación:

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} [\max |f^{(4)}(x)|], \quad x_0 \leq x \leq x_2.$$

3. La regla de Simpson 3/8 tiene un grado de precisión de $n = 3$ y si $f \in C^4[a, b]$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + E,$$

donde $E = -\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$, $x_0 < \xi < x_3$. Además, el valor absoluto del error de truncamiento satisface la relación:

$$|E| \leq \frac{3h^5}{80} [\max |f^{(4)}(x)|], \quad x_0 \leq x \leq x_3.$$

Por lo común, se prefiere la regla de Simpson 1/3, ya que alcanza una exactitud de tercer orden con tres nodos en lugar de los cuatro nodos requeridos en la versión 3/8. Sin embargo, la regla de Simpson 3/8 es útil cuando el número de subintervalos es impar.

Ejemplo 2.7 Aproxime la integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ por medio de las fórmulas de Newton Cotes.

Solución.

Es importante tener claro que dado el primer nodo x_0 , los siguientes son de la forma $x_k = x_0 + kh$, donde $h = \frac{x_k - x_0}{k}$ para $k = 1, 2, 3$.

Sea $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Para la regla del trapecio.

Con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ se tiene $h = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{2}(f_0 + f_1) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-1}) \approx 0.68394.\end{aligned}$$

b) Para la regla de Simpson $1/3$.

Tenemos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$ y $h = \frac{1-0}{2} = 0.5$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + 4e^{-1/4} + e^{-1}\right) \approx 0.74718.\end{aligned}$$

c) Por último, para la regla de Simpson $3/8$, con $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$ y $h = \frac{1}{3}$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 3e^{-1/9} + 3e^{-4/9} + e^{-1}\right) \approx 0.74699.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8 *Proporcione una cota para el error absoluto al aproximar la integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ por regla del trapecio.*

Solución.

El término del error para la regla del trapecio incluye la segunda derivada del integrando.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \text{ y } f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Ahora, nos preguntamos ¿que tan grande es $f''(x)$ en $[0, 1]$? Es claro que $f''(x)$ es creciente en este intervalo, de modo que su valor absoluto alcanza su valor mayor en $x = 0$, es decir, $\max |f''(x)| = |f''(0)| = 2$. Entonces

$$|E| = \left| -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{12} \max |f''(x)| = \frac{1}{12}(2) \approx 0.1666.$$

Por lo tanto, el error que se comete no es mayor que 0.1666.

Ejemplo 2.9 Para algunas funciones elementales en el intervalo $[0, 2]$ se resumen los resultados de la integración numérica de $f(x)$ con tres decimales, en la siguiente tabla:

$f(x)$	x^2	x^4	e^x	$\sqrt{1+x^2}$	$(x+1)^{-1}$
Valores exactos	2.667	6.400	6.389	2.958	1.099
Trapezoidal	4.000	16.000	8.389	3.326	1.333
1/3 de Simpson	2.667	6.667	6.421	2.964	2.964
3/8 de Simpson	2.667	6.519	6.403	2.960	1.105

2.2.3. Las reglas compuestas del Trapecio y de Simpson

La regla compuesta del trapecio se obtiene al repetir la regla del trapecio para un dominio dividido en un número par o impar de subintervalos; y la regla compuesta de 1/3 de Simpson es una aplicación repetida de la ecuación (2.5) para un dominio dividido en un número par de subintervalos. (Véase las figuras 2.5 y 2.6)

Teorema 2.7 Suponga que se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ de anchura $h = \frac{b-a}{n}$ mediante una partición regular cuyos nodos son $x_k = a + kh$, para cada $k = 0, 1, \dots, n$. Entonces la **regla compuesta del trapecio** para n subintervalos puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \\
 &= \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f_{k-1} + f_k] \\
 &= \frac{h}{2} [f_0 + f_n] + h \sum_{k=1}^{n-1} f_k = T(f, h).
 \end{aligned}$$

Teorema 2.8 Suponga que se divide el intervalo $[a, b]$ en $n = 2m$ subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ de anchura $h = \frac{b-a}{2m}$ mediante una partición regular cuyos nodos son $x_k = a + kh$, para cada $k = 0, 1, \dots, 2m$. Entonces la **regla compuesta 1/3 de Simpson** con $2m$ subintervalos puede escribirse como

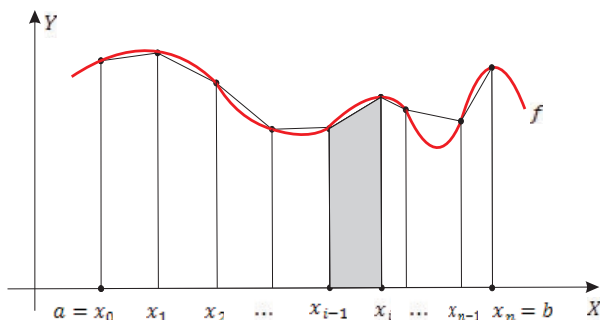


Figura 2.5:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}] \\
 &= \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n [f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}] \\
 &= \frac{h}{3} [f_0 + f_{2m}] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^{m-1} f_{2k} + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^m f_{2k-1} = S(f, h).
 \end{aligned}$$

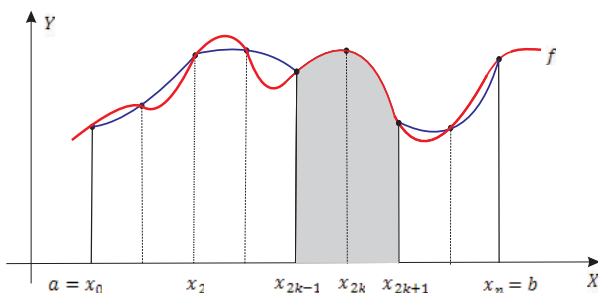


Figura 2.6:

Análisis de error

Ahora nos ocuparemos en analizar el error en el que se incurre al usar la regla compuesta del trapecio y la regla compuesta de Simpson 1/3 para estimar una integral. El siguiente teorema da las fórmulas para estimar los errores involucrados, y además nos permiten estimar el número de subintervalos necesarios para alcanzar la precisión deseada.

Teorema 2.9 Si f'' existe y es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces el error E_T en la aproximación de $I = \int_a^b f(x) dx$ por la regla compuesta del trapecio T , es

$$E_t = I - T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Si $f^{(4)}$ existe y es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces el error E_S en la aproximación de $\int_a^b f(x) dx$ por la regla compuesta de 1/3 de Simpson, S , es

$$E_S = I - S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Observación.

El valor absoluto del error satisface la relación

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 [\max |f''(x)|], \quad a \leq x \leq b$$

y

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 [\max |f^{(4)}(x)|], \quad a \leq x \leq b.$$

Ejemplo 2.10 Aproxime la integral definida $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx$ por medio de la regla compuesta del trapecio con $n = 4$.

Solución.

Tenemos $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $a = 0$, $b = 2$ y $n = 4$. Entonces $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ y

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx &\approx \frac{1}{4} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{8}{17} + \frac{2}{5} + \left(\frac{8}{25} \right) + \frac{1}{8} \right) \\ &\approx 0.3914. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11 Aplique la regla compuesta de Simpson 1/3 con el valor indicado de n para aproximar las integral

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx, \quad n = 4$$

Solución.

Con $n = 4$ se tiene $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx &\approx \frac{1}{6} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + 4 \left(\frac{4}{17} \right) + 2 \left(\frac{1}{5} \right) + 4 \left(\frac{4}{25} \right) + \frac{1}{8} \right) \\ &\approx 0.3927. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, en lugar de especificar n y preguntar por el error, damos el error deseado y preguntamos que tan grande debe ser n .

Ejemplo 2.12 Determine el valor de n de modo que la regla compuesta del trapecio aproximará a la integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error, E_s , que satisface $|E_s| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

Solución.

La fórmula del error es $E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$.

En este ejemplo $f(x) = e^{-x^2}$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ y $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Como $|f''(x)| \leq 2$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$, el error en valor absoluto $|E_T| \leq \frac{h^2}{6}$. Para tener un error de como máximo $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ se requiere

$$\frac{h^2}{6} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad \text{o sea} \quad h \leq 0.01732.$$

Desde que $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, resulta que $n \geq 58$. Por lo tanto, 59 o más nodos producirán la precisión deseada.

Ejemplo 2.13 Determine el valor de n de modo que la regla compuesta de Simpson 1/3 aproximará a la integral $\int_1^4 \frac{1}{x+1} dx$ con un error, E_s , que satisface $|E_s| \leq 0.00001$.

Solución.

El término del error para la regla compuesta de Simpson 1/3 incluye la cuarta derivada del integrando, esto es $f^{(4)}(x) = 24(1+x)^{-5}$.

Es claro que $f^{(4)}(x)$ es decreciente en este intervalo, por lo que $\max |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(1)| = 24(2^{-5})$.

$$|E_S| = \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{3^5}{180n^4} \max |f^{(4)}(x)| = \frac{3^5}{180n^4} \left(\frac{24}{2^5} \right) = \frac{81}{80n^4}$$

Como se quiere $|E_S| \leq 0.00001$,

$$\frac{81}{80n^4} \leq 0.00001$$

de donde $n^4 \geq \frac{9}{0.00001} \approx 101.250$ implica que $n \geq (101.250)^{1/4} \approx 17.8$. Por lo tanto, $n \geq 18$ producirán la precisión deseada.

Ejemplo 2.14 *Mientras Luis conducía desde Trujillo a Chimbote, su hijo observó la velocidad del automovil cada 10 minutos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Utilice la regla compuesta del trapecio para aproximar cuánto viajaron.*

Tiempo(min)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Velocidad (km/h)	0	55	57	60	70	70	70	70	19	0	59
Tiempo	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210
Velocidad (km/h)	63	65	62	0	0	0	22	38	35	25	0

Solución.

Sea $v(t)$ la velocidad del automovil en el instante t , donde t se mide en horas, contada a partir del inicio del viaje. Si conociéramos $v(t)$ para cada t en el intervalo $[0, 3.5]$ podemos determinar la distancia recorrida al evaluar la integral $\int_0^{3.5} v(t) dt$. Debido a que sólo conocemos $v(t)$ para 22 valores de t ; $t = \frac{k}{6}$, $k = 0, 1, \dots, 21$, dividimos el intervalo $[0, 3.5]$ en subintervalos de longitud $\Delta_t = \frac{1}{6} = h$. Entonces, aplicando la regla compuesta del trapecio, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{3.5} v(t) dt &\approx \frac{h}{2} \left[v_0 + 2 \sum_{i=1}^{20} v_i + v_{21} \right] \\ &= \frac{1}{12} [0 + 2(55 + 57 + 60 + 70 + 70 + 70 + 70 + 19 + 0 + 59 \\ &\quad + 63 + 65 + 62 + 0 + 0 + 0 + 22 + 38 + 35 + 25) + 0] \\ &= 140. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ellos condujeron aproximadamente 140 km.

Ejemplo 2.15 Se recolectaron los siguientes datos para una sección transversal de un río (y = distancia de una ribera, H = profundidad y U = velocidad):

y (m)	0	1	3	5	7	8	9	10
H (m)	0	1	1.5	3	3.5	3.2	2	0
U (m/s)	0	0.1	0.12	0.2	0.25	0.3	0.15	0

Use integración numérica para calcular:

- la profundidad promedio,
- el área de la sección transversal y
- el caudal.

Nota: el área de la sección transversal (A_C) y el caudal (Q) se calculan con las fórmulas

$$A_C = \int_0^y H(y) dy \quad Q = \int_0^y H(y) U(y) dy$$

Solución.

a) Aplicaremos el teorema del valor medio para integrales y luego aproximaremos la integral combinando la regla del Trapecio, Simpson 3/8 y Simpson 1/3. Esto es,

$$prof \text{ prom} = \frac{1}{y_7 - y_0} \int_{y_0}^{y_7} H(y) dy \approx \frac{1}{10} \left[T_{[0,1]} + \frac{3}{8} S_{[1,7]} + \frac{1}{3} S_{[7,9]} + T_{[9,10]} \right]$$

donde $y_0 = 0$, $y_7 = 10$, y

$$\begin{aligned} T_{[0,1]} &= \frac{h}{2} (H_0 + H_1) = \frac{1}{2} (0 + 1) = \frac{1}{2}. \\ \frac{3}{8} S_{[1,7]} &= \frac{3h}{8} (H_1 + 3H_2 + 3H_3 + H_4) \\ &= \frac{3(2)}{8} (1 + 3(1.5) + 3(3) + 3.5) = 13.5. \\ \frac{1}{3} S_{[7,9]} &= \frac{h}{3} (H_4 + 4H_5 + H_6) \\ &= \frac{1}{3} (3.5 + 4(3.2) + 2) = 6.1. \\ T_{[9,10]} &= \frac{h}{2} (H_6 + H_7) = \frac{1}{2} (2 + 0) = 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{prof. prom} &\approx \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} + 13.5 + 6.1 + 1 \right) \\ &= 2.11 \text{ m.} \end{aligned}$$

b) Aplicando nuevamente el teorema del valor medio para integrales, el área de la sección transversal es:

$$\begin{aligned} A_C &= \int_{y_0}^{y_7} H(y) dy = (\text{prof. prom}) (y_7 - y_0) \\ &= 2.11 (10) \\ &= 21.1 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

c) Usando la fórmula del caudal y combinando las regla del trapecio, Simpson 3/8 y Simpson 1/3, tenemos:

$$Q = \int_{y_0}^{y_7} H(y) U(y) dy \approx \left[T_{[0,1]} + \frac{3}{8} S_{[1,7]} + S_{[7,9]} + T_{[9,10]} \right]$$

donde $y_0 = 0$, $y_7 = 10$, y

$$\begin{aligned} T_{[0,1]} &= \frac{h}{2} (H_0 U_0 + H_1 U_1) = \frac{1}{2} (0(0) + 1(0.1)) = 0.05 \\ \frac{3}{8} S_{[1,7]} &= \frac{3h}{8} (H_1 U_1 + 3H_2 U_2 + 3H_3 U_3 + H_4 U_4) \\ &= \frac{3(2)}{8} (1(0.1) + 3(1.5)(1.2) + 3(3)(0.2) + 3.5(0.25)) = 6.1313 \\ \frac{1}{3} S_{[7,9]} &= \frac{h}{3} (H_4 U_4 + 4H_5 U_5 + H_6 U_6) \\ &= \frac{1}{3} (3.5(0.25) + 4(3.2)(0.3) + 2(0.15)) = 1.6717 \\ T_{[9,10]} &= \frac{h}{2} (H_6 U_6 + H_7 U_7) \\ &= \frac{1}{2} (2(0.15) + 0(0)) = 0.15 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos, tenemos:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{y_0}^{y_7} H(y) U(y) dy \\ &\approx (0.05 + 6.1313 + 1.6717 + 0.15) \\ &= 8.003 \text{ m}^3/\text{s.} \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 2.2.1

En los ejercicios 1-5, utilice los métodos de sumas de Riemann del punto izquierdo, punto derecho y del punto medio para aproximar la integral definida. Luego, utilice el segundo teorema fundamental del cálculo para determinar el valor exacto de cada integral.

1. $\int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$

2. $\int_1^3 \frac{1}{x^3} dx$

3. $\int_1^3 x\sqrt{x^2+1} dx$

4. $\int_0^1 x(x^2+1)^7 dx$

5. $\int_1^4 (x+1)^{3/2} dx$

EJERCICIOS PROPUESTOS 2.2.2

1. Aproxime las siguientes integrales aplicando la regla del trapecio.

a) $\int_{0,5}^1 x^5 dx$

b) $\int_0^{0,5} \frac{3}{x-1} dx$

c) $\int_1^{1,5} x^2 \ln x dx$

d) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

e) $\int_1^{1,6} \frac{x}{x^2-4} dx$

f) $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} x dx$

g) $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x dx$

2. Obtenga una cota del error en el ejercicio 1 aplicando la fórmula de error y compárela con el error real.
3. Repita el ejercicio 1 aplicando la regla de Simpson 3/8.
4. Repita el ejercicio 2 usando la regla de Simpson 1/3.

EJERCICIOS PROPUESTOS 2.2.3

1. Aplique la regla compuesta del trapecio con los valores indicados de n para aproximar las siguientes integrales

a) $\int_1^2 x \ln x dx, \quad n = 4$

b) $\int_{-2}^2 x^3 e^x dx, \quad n = 4$

c) $\int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4} dx, \quad n = 6$

d) $\int_0^\pi x^2 \cos x dx, \quad n = 6$

e) $\int_0^2 e^{2x} \operatorname{sen} 3x dx, \quad n = 8$

f) $\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 4} dx, \quad n = 8$

g) $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad n = 8$

2. Aproxime $\int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx$, por medio de:

a) la regla compuesta del trapecio, para $h = 0.25$.

b) la regla compuesta de Simpson 1/3, para $h = 1/4$.

3. Determine el número n y el tamaño de los subintervalos h de manera que la regla del trapecio con n subintervalos nos permita obtener la integral dada con una precisión de 5×10^{-9} .

$$\int_0^2 x e^{-x} dx$$

4. Determine el número n y el tamaño de los subintervalos h de manera que la regla de Simpson 1/3 con n subintervalos nos permita obtener la integral dada con una precisión de 10^{-4} .

a) $\int_0^2 e^{2x} \operatorname{sen} 3x dx$

b) $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$.

5. Aproxime la integral definida $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$ por medio de la regla compuesta del trapecio con $n = 4$.

6. Aproxime la integral definida $\int_0^2 (e^{-x} \operatorname{sen}(5x) + 1) dx$ por medio de la regla compuesta de Simpson 1/3 con 15 nodos; determine también una cota del error cometido.

7. Determine los valores de n y h que se requieren para aproximar

$$\int_0^2 \frac{1}{x + 4} dx$$

con una exactitud de 10^{-5} y calcule la aproximación.

- a) Aplique la regla compuesta del trapecio.
b) Aplique la regla compuesta de Simpson 1/3.
8. Cada 12 minutos entre las 5:00 pm y 7:00 pm, se midió la razón (en galones por minuto) a la cual fluía el agua del depósito de agua, para uso doméstico de un determinada pueblo. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. ¿Cuánta agua fue utilizada en ese período de 2 horas?

Tiempo	5:0	5:12	5:24	5:36	5:48	6:00
Flujo(gal/min)	65	71	68	78	105	111
Tiempo	6:12	6:24	6:36	6:48	7:00	
Flujo (gal/min)	108	144	160	152	148	

9. La concentración de salida de un reactor se mide en distintos momentos durante un período de 24 horas:

$t \text{ (h)}$	0	1	5.5	10	12	14	16	18	20	24
$c \text{ (mg/L)}$	1	1.5	2.3	2.1	4	5	5.5	5	3	12

El caudal de salida en m^3/s se puede calcular con la fórmula:

$$Q(t) = 20 + 10 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{24} (t - 10) \right)$$

Use el mejor método de integración numérica para determinar el promedio ponderado de concentración de salida del reactor durante el período de 24 horas,

$$\bar{c} = \frac{\int_0^t Q(t) c(t) dt}{\int_0^t Q(t) dt}$$

10. La figura 2.7 muestra la profundidad, en metros, del agua en un río, medida a intervalos de 10 metros por la anchura del río. Si el río fluye a 4 km por hora, durante un día. ¿Cuánta agua (en metros cúbicos) está pasando por el lugar en donde se tomaron estas medidas? Utilice regla compuesta de Simpson 1/3.

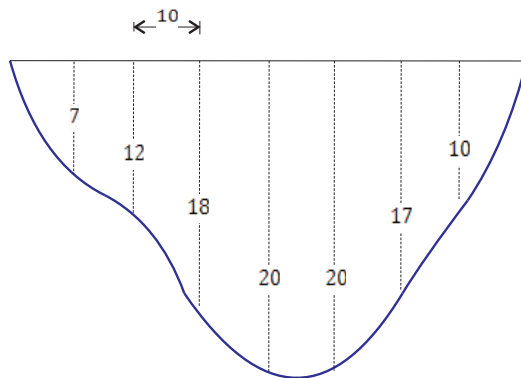


Figura 2.7:

Funciones Gamma y Beta

La función Gamma fue descubierta en 1729 en una correspondencia entre un matemático suizo en San Petersburgo y un matemático alemán en Moscú: Leonhard Euler (1707-1783), que por aquel entonces tenía 22 años y que se convertiría en el mejor matemático del siglo XVIII, y Christian Goldbach (1690-1764), famoso por un problema de teoría de números muy fácil de enunciar pero que ha resultado, al menos por el momento, imposible de resolver.

Estas funciones tienen diversas aplicaciones en matemáticas, física y estadística, y son objeto de estudio en ramas avanzadas de estos campos debido a sus propiedades interesantes y conexiones con otras funciones y teorías.

3.1. Función Gamma de Euler

Definición 3.1 *La función Gamma de Euler $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (3.1)$$

Esta integral es convergente para $x > 0$.

A continuación probaremos una generalización de la identidad $n! = n(n-1)!$.

Proposición 3.1 (Relación de recurrencia) *Se verifica:*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

Prueba.

Integrando por partes en (3.1) en $x+1$, tenemos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

La relación anterior se extiende de forma inductiva para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x\Gamma(x). \quad (3.2)$$

Corolario 3.1.1 *Se verifica:*

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Prueba.

Compruébese que $\Gamma(1) = 1$ en (3.1) y aplíquese (3.2).

Propiedades

$$(1) \quad \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}, \quad 0 < x < 1.$$

$$(2) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La prueba de estos resultados requiere de conocimientos de cálculo avanzado.

A manera de ilustración de las proposición 3.1 y la propiedad 2, tenemos:

$$\Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{y} \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

Ejemplo 3.1 *Calcule $\int_0^\infty x^4 e^{-2x} dx$.*

Solución.

Haciendo $t = 2x$, tenemos inmediatamemente

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^4 e^{-2x} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^4 e^{-t} \left(\frac{dt}{2}\right) \\ &= \frac{1}{32} \int_0^\infty t^4 e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Identificando $4 = x - 1$ se deduce que $x = 5$. Lo que implica que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^4 e^{-2x} dx &= \frac{1}{32} \Gamma(5) \\ &= \frac{1}{32} (4!) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2 *Calcule $\int_0^\infty (5x^3 - x^2) e^{-2x^2} dx$.*

Solución.

Es presando en una suma de integrale y luego haciendo $2x^2 = t$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (5x^3 - x^2) e^{-2x^2} dx &= 5 \int_0^\infty x^3 e^{-2x^2} dx + \int_0^\infty x^2 e^{-2x^2} dx \\ &= 5 \int_0^\infty \frac{t}{2} e^{-t} \left(\frac{dt}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{8} \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} dt \\ &= \frac{5}{8} \int_0^\infty t e^{-t} dt + \frac{\sqrt{2}}{8} \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} dt \end{aligned}$$

En la primera y segunda integral del lado derecho identificamos $x - 1 = 1$ y $x - 1 = 1/2$, es decir $x = 2$ y $x = 3/2$. Por lo tanto, aplicando la definición, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (5x^3 - x^2) e^{-2x^2} dx &= \frac{5}{8} \Gamma(2) + \frac{\sqrt{2}}{8} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{2\pi}}{16}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3 Calcule $\int_1^\infty \sqrt{x-1} e^{-(x-1)^3} dx$.

Solución.

Haciendo $t = (x-1)^3$, vemos que $t \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow 1$ y también $t \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \sqrt{x-1} e^{-(x-1)^3} dx &= \int_0^\infty t^{1/6} e^{-t} \left(\frac{1}{3t^{2/3}} du \right) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4 Calcule $\int_{0^+}^1 x^3 (-\ln x)^{-1/2} dx$.

Solución.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{0^+}^1 x^3 (-\ln x)^{-1/2} dx &= \int_{\infty}^0 e^{-3u} u^{-1/2} (-e^{-u} du), \text{ donde } u = -\ln x \\
 &= \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-4u} du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt, \text{ donde } t = 4u \\
 &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

3.2. Función Beta de Euler

Definición 3.2 La función Beta de Euler $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ es definida por

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \quad (3.3)$$

Esta integral es convergente para $p, q > 0$.

Propiedades

$$(1) \quad \beta(p, q) = \beta(q, p), \forall p, q > 0$$

$$(2) \quad \beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall p, q > 0$$

Prueba.

(1) Mediante la sustitución $x = 1 - t$, es facil ver que

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt = \beta(q, p).$$

(2) Su demostración requiere de conocimientos de cálculo avanzado.

Proposición 3.2 Se verifica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(p, q)$$

para todo $p, q > 0$.

Prueba.

Haciendo $x^{1/2} = \operatorname{sen}\theta$, se sigue que $x = \operatorname{sen}^2\theta$ y $dx = 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta$. Sustituyendo en (3.3) y teniendo en cuenta ($x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \theta \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 1^- \Rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$) tenemos inmediatamente lo que se quería probar.

Ejemplo 3.5 Calcule $\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x}} dx$.

Solución.

Tenemos:

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 x^{-1/2} (1-x) dx.$$

Identificando $p-1 = -1/2$ y $q-1 = 1$, se tiene $p = 1/2$ y $q = 2$. Luego, aplicando la definición (3.3) y la propiedad (2), tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x}} dx &= \frac{\sqrt{2}}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, 2\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6 Calcule $\int_0^2 \sqrt[3]{8x^3 - x^6} dx$.

Solución.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt[3]{8x^3 - x^6} dx &= \int_0^2 x \sqrt[3]{8 - x^3} dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 u^{-1/3} (1-u)^{1/3} du, \quad \text{donde } x^3 = 8u. \end{aligned}$$

Haciendo $p-1 = -1/3$ y $q-1 = 1/3$ encontramos $p = 2/3$ y $q = 4/3$. Luego, aplicando la definición (3.3) y las correspondientes propiedades, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt[3]{8x^3 - x^6} dx &= \frac{8}{3} \beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{8}{9} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{8}{9} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.7 Calcule $\int_{-1}^0 (x+1)^6 (3x)^2 dx$.

Solución.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 (x+1)^6 (3x)^2 dx &= 9 \int_0^1 u^6 (u-1)^2 du, \quad \text{donde } x+1 = u \\
&= 9 \beta(7, 3) \\
&= 9 \frac{\Gamma(7) \Gamma(3)}{\Gamma(10)} = 9 \frac{6!2!}{9!} \\
&= \frac{1}{28}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.8 Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \theta (1 + \cos 2\theta) d\theta$.

Solución.

Tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \theta (1 + \cos 2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \theta \cos^2 \theta d\theta.$$

Haciendo $2p - 1 = 5$ y $2q - 1 = 2$ obtenemos $p = 3$ y $q = 3/2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \cos^5 \theta d\theta &= \beta\left(3, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(3) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)}{\frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} \\
&= \frac{8}{105}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.9 Calcule $\int_0^\infty \frac{16}{x^4 + 4} dx$.

Solución.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{16}{x^4 + 4} dx &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \tan^2 \theta} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{2 \tan \theta}} d\theta, \text{ donde } x^2 = 2 \tan \theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} \theta \cdot \cos^{\frac{1}{2}} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Haciendo $2p - 1 = -1/2$ y $2q - 1 = 1/2$ obtenemos $p = 1/4$ y $q = 3/4$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{x^4 + 4} dx &= 2\sqrt{2} \left[\frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \right] \\ &= \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \sqrt{2} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.1

Evalúe las siguientes integrales.

1. $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$
2. $\int_0^\infty (x^4 + 3x^2) e^{-5x^2} dx$
3. $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{8x}} dx$
4. $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} dx$
5. $\int_0^\infty (x^4 + 1) e^{-x^2} dx$
6. $\int_0^1 (\ln x)^4 dx$
7. $\int_0^1 x^3 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^3 dx$
8. $\int_0^1 x^3 \ln^5 x dx$
9. $\int_{-1}^\infty (x^2 - 1) x e^{-x^2 - 2x} dx$
10. $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-4x^2} dx$

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.2

Evalúe las siguientes integrales.

1. $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$

6. $\int_0^a x^4 \sqrt{16-x^2} dx$

2. $\int_0^4 x^{3/2} (4-x)^{5/2} dx$

7. $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6} dx$

3. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{3x}} dx$

8. $\int_0^\infty \frac{16}{(x^4+1)^2} dx.$

4. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$

9. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2-x^3}} dx$

5. $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx$

10. $\int_{-1}^1 (x+1) \sqrt[3]{-x^3-3x^2-3x+7} dx$

Aplicaciones de la integral definida

La integral definida tiene aplicaciones en áreas tan diversas como matemáticas puras, ingeniería, física, economía, estadística y muchas otras disciplinas. Es una herramienta poderosa y versátil que se utiliza para resolver problemas de cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de curvas, trabajo realizado por una fuerza, centro de masa de una lámina y muchas más.

4.1. Área de regiones planas en coordenadas rectangulares

En esta sección extenderemos el concepto de área a regiones limitadas por la gráfica de funciones integrables. Para esto consideraremos sólo una partición, un rectángulo genérico, que represente a cualquier elemento de la partición de la región plana.

Teorema 4.1 *Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región, R , comprendida entre las gráficas de f y g ; y las rectas $x = a$ y $x = b$ es dada por*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (4.1)$$

Prueba.

La verificación de este resultado se puede realizar considerando una partición regular de $[a, b]$ tal que divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de ancho Δx . Entonces, como se muestra en la figura 4.1, el área del rectángulo genérico de ancho Δx y alto $f(x_i) - g(x_i)$ donde x_i esté en el i -ésimo subintervalo, es

$$\Delta A_i = [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x.$$

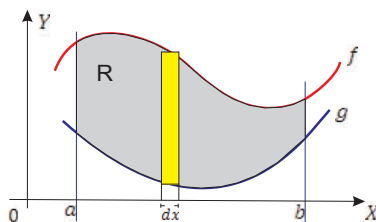


Figura 4.1:

Al sumar las áreas de los n rectángulos y luego al tomar límite, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x.$$

Así, el área de la región R , es

$$Area = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Ejemplo 4.1 Calcule el área de la región comprendida entre la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 2x$; y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución.

La región se muestra en la figura 4.2.

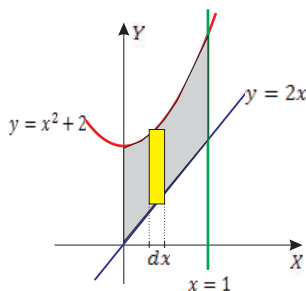


Figura 4.2:

Al considerar un rectángulo genérico perpendicular al eje X de área $dA = (f(x) - g(x)) dx$, e integrar desde $x = 0$ hasta $x = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - 2x] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2 Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{14}{3}, \quad g(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{22}{3}.$$

Solución.

La región se muestra en la figura 4.3.

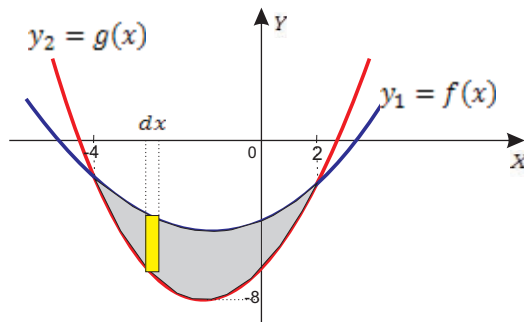


Figura 4.3:

Los puntos de intersección entre las curvas encontramos resolviendo la ecuación cuadrática $f(x) = g(x)$, que produce $x^2 + 2x - 8 = 0$, cuyas soluciones son $x = -4$ y $x = 2$. Observe que ambas funciones son negativas, es decir $g(x) \leq f(x) \leq 0$ en $[-4, 2]$.

Al considerar el rectángulo genérico de área $dA = (f(x) - g(x)) dx$ e integrar desde $x = -4$ hasta $x = 2$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-4}^2 \left[\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{14}{3} \right) - \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{22}{3} \right) \right] dx \\
 &= \int_{-4}^2 \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{8}{3}x \right]_{-4}^2 \\
 &= 12u^2.
 \end{aligned}$$

En lo sucesivo, solamente por cuestiones de comodidad, omitiremos de colocar las unidades del área.

Ejemplo 4.3 Calcule el área de la región limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x, \quad g(x) = 4x - x^2.$$

Solución.

La región se muestra en la figura 4.4.

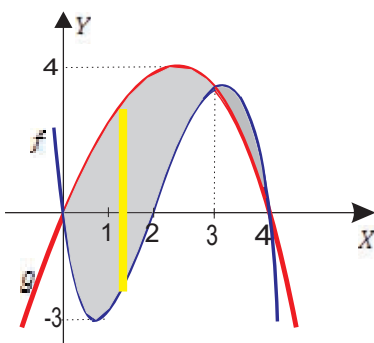


Figura 4.4:

Los puntos de intersección entre las curvas se obtiene de la ecuación $f(x) = g(x)$, que produce $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, cuyas soluciones son: $x = 0$, $x = 3$, y $x = 4$. Por otro lado, como $f(x) \leq g(x)$ en $[0, 3]$ y $g(x) \leq f(x)$ en $[3, 4]$, el

área de la región es

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^3 [g(x) - f(x)] dx + \int_3^4 [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx + \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x) dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \right]_0^3 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2 \right]_3^4 \\
 &= \frac{45}{4} + \frac{7}{12} \\
 &= \frac{71}{6}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4 Calcule el área de la región comprendida por la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 1|$ y la recta L que pasa por el punto $(0, 1)$ y forma un ángulo de 135° con el eje X .

Solución.

La región se muestra en la figura 4.5.

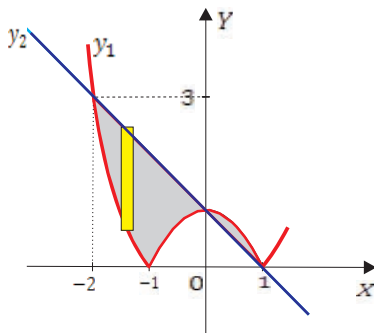


Figura 4.5:

Es fácil de obtener que la ecuación de la recta L es $y = -x + 1$, y por consiguiente la intersección entre la curva $y = f(x)$ y la recta L ocurre cuando $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto, según las características de la región, el área es obtenida con dos integrales:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^0 (y_2 - y_1) dx + \int_0^1 (y_1 - y_2) dx \\
&= \int_{-2}^0 [(-x + 1) - |x^2 - 1|] dx + \int_0^1 [|x^2 - 1| - (-x + 1)]_2 dx \\
&= \int_{-2}^{-1} [(-x + 1) - (x^2 - 1)] dx + \int_{-1}^0 [(-x + 1) - (1 - x^2)] dx + \\
&\quad \int_0^1 [(1 - x^2) - (-x + 1)] dx \\
&= \frac{7}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5 Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; para $x \geq 1$.

Solución.

En la Figura 4.6 se muestra la región.

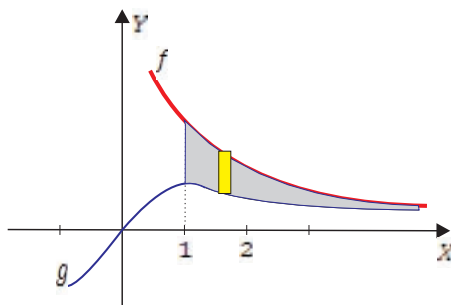


Figura 4.6:

Nótese que $g(x) \leq f(x)$ en $[1, \infty)$. Por lo que al considerar el rectángulo genérico perpendicular al eje X de área $dA = [f(x) - g(x)] dx$, el área, A , de la región queda formulada como una integral impropia que es convergente.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{1}{2} \ln 2 \right] \\
 &= \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 \\
 &= \ln \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6 Determine el área de la región limitada por la gráfica de

$f(x) = 3 + \ln(x - 1)$ y su asíntota; y la recta $y = x + 1$.

Solución.

En la figura 4.7 se muestra la región.

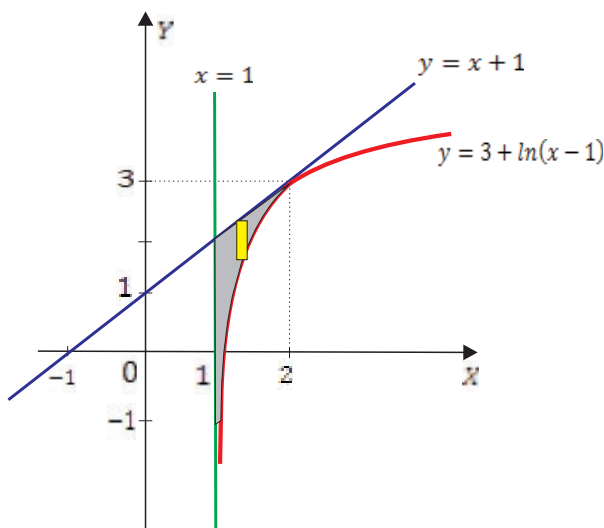


Figura 4.7:

Es inmediato ver que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$ y por tanto la recta $x = 1$ constituye una asíntota.

El rectángulo genérico perpendicular al eje X tiene área

$$dA = ((x + 1) - (3 + \ln(x - 1))) dx.$$

Entonces, cuando x varía desde $x = 1$ hasta $x = 2$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^2 [x + 1 - (3 + \ln(x - 1))] dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 [x + 1 - (3 + \ln(x - 1))] dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{2} - x - (x - 1) \ln |x - 1| \right]_{1+\varepsilon}^2 \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[0 - \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{2} - (1 + \varepsilon) - \varepsilon \ln \varepsilon \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7 Calcule el área de la región limitada por las curvas:

$$y = 2^x, \quad y = x^2 - 8x + 16, \quad y = \left| x - \frac{5}{2} \right| - 3$$

Solución.

En la figura 4.8 se muestra la región.

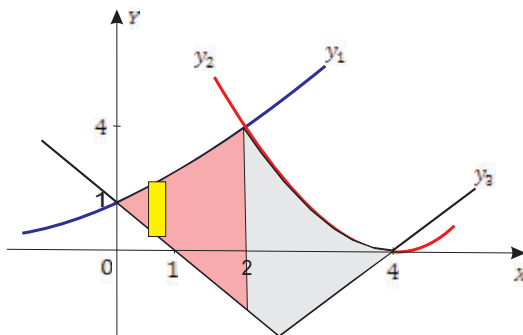


Figura 4.8:

Sean $y_1 = 2^x$, $y_2 = (x - 4)^2$ e $y_3 = \left| x - \frac{5}{2} \right| - \frac{3}{2}$. La intersección entre las curvas se obtiene de las ecuaciones $y_1 = y_3$, $y_1 = y_2$ e $y_2 = y_3$. Estos son, $(0, 1)$, $(2, 4)$ y $(4, 0)$ respectivamente.

Al considerar el rectángulo genérico perpendicular al eje X , tenemos

$$A = \int_0^2 (y_1 - y_3) dx + \int_2^4 (y_2 - y_3) dx.$$

Como

$$y_3(x) = \begin{cases} -x+1 & , \quad x < \frac{5}{2} \\ x-4 & , \quad x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [2^x - (1-x)] dx + \int_2^{5/2} [(x-4)^2 - (1-x)] dx \\ &\quad + \int_{5/2}^4 [(x-4)^2 - (x-4)] dx \\ &= \left[\frac{2^x}{\ln 2} - x + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-1)^2}{2} \right]_2^{5/2} \\ &\quad + \left[\frac{(x-4)^3}{3} - \frac{(x-4)^2}{2} \right]_{5/2}^4 \\ &= \frac{3}{\ln 2} + \frac{13}{6} + \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Teorema 4.2 Si f y g son funciones continuas en $[c, d]$ y $g(y) \leq f(y)$ para todo y en $[c, d]$, entonces el área de la región, R , comprendida entre las gráficas de f y g ; y las rectas $y = c$ e $y = d$ es dada por

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy. \quad (4.2)$$

En la figura 4.9 se muestra el elemento rectangular genérico cuya área es $dA = [f(y) - g(y)] dy$.

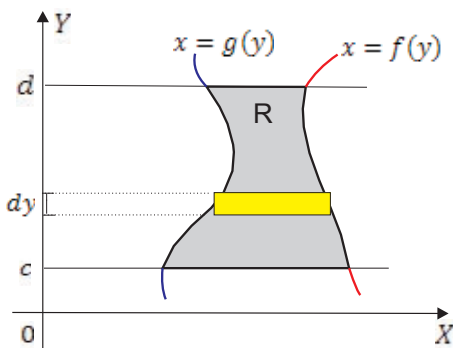


Figura 4.9:

Ejemplo 4.8 Calcule el área de la región limitada por la parábola $x = y^2 - 3$ y la recta $y = -x - 1$.

Solución.

En la figura 4.10 se muestra la región y los puntos de intersección entre las curvas.

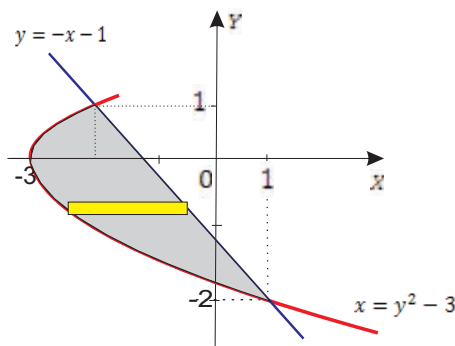


Figura 4.10:

El rectángulo genérico perpendicular al eje Y tiene área $dA = [(-y - 1) - (y^2 - 3)] dy$. Por tanto, cuando y varía desde $y = -2$ hasta $y = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^1 [-y - 1 - (y^2 - 3)] dy \\
 &= \left(\int_{-2}^1 -y^2 - y + 2 \right) dy \\
 &= \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^1 \\
 &= \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Nótese que también es posible considerar el rectángulo genérico perpendicular al eje Y . En este caso requiere dos integrales ya que la frontera superior cambia a partir de $x = 2$. Veamos los cálculos-

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 [(x - 1) + \sqrt{3 - x}] dx + \int_2^3 [\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}] dx \\
 &= \int_{-1}^2 [(x - 1) + \sqrt{3 - x}] dx + 2 \int_2^3 \sqrt{3 - x} dx \\
 &= \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9 Calcule el área de la región comprendida por la curva $(y-1)^3 = x$, la recta $y = 2$ y la recta L cuya ordenada en el origen es igual a 11 y de pendiente $m = -1$.

Solución.

En la figura 4.11 se muestra la región.

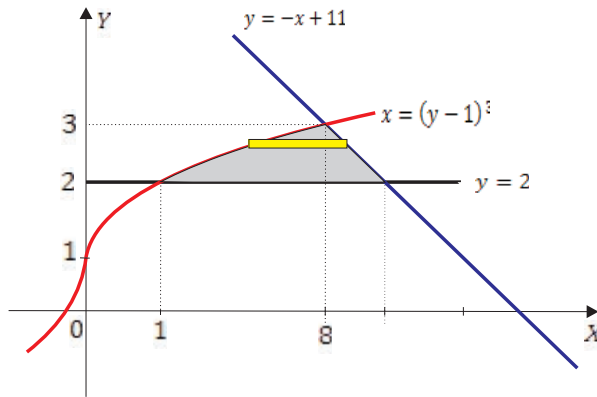


Figura 4.11:

Es inmediato ver que la recta L tiene por ecuación $y = -x + 11$. El rectángulo genérico perpendicular al eje Y tiene área $dA = [(11 - y) - (y - 1)^3] dy$. Por tanto, cuando y varía de desde $y = 2$ hasta $y = 3$, el área de la región es:

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 \left((11 - y) - (y - 1)^3 \right) dy \\ &= \left[11y - \frac{y^2}{2} - \frac{(y - 1)^4}{4} \right]_2^3 \\ &= \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.10 Calcule el área de la región limitada por las curvas:

$$x = y^2(4 - y), \quad \sqrt{x + 4} = -3y, \quad (x + 4)^2 = 4y.$$

Solución. La región se muestra en la figura 4.12, así como los puntos de intersección entre las curvas son $(-4, 0)$, $(0, 4)$ y $(5, -1)$.

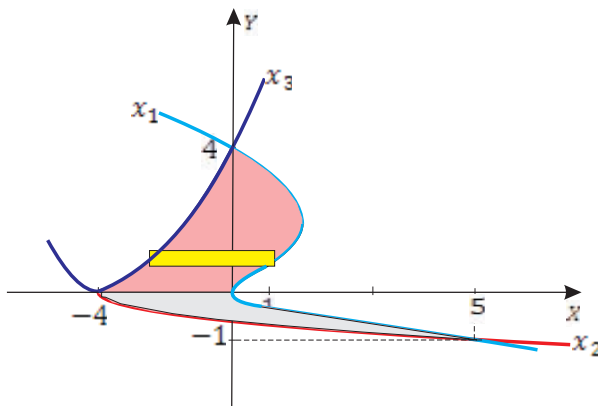


Figura 4.12:

Sean $x_1 = 4y^2 - y^3$, $x_2 = 9y^2 - 4$, y $x_3 = -4 + 2\sqrt{y}$. Al considerar el rectángulo genérico perpendicular al eje Y , tenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^0 (x_1 - x_2) dy + \left(\int_0^4 x_1 - x_3 \right) dy \\
 &= \int_{-1}^0 [4y^2 - y^3 - (9y^2 - 4)] dy + \int_0^4 [4y^2 - y^3 - (-4 + 2\sqrt{y})] dy \\
 &= \int_{-1}^0 (4 - 5y^2 - y^3) dy + \int_0^4 (4y^2 - y^3 + 4 - 2\sqrt{y}) dy \\
 &= \left[4y - \frac{5y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + 4y - \frac{4y^{3/2}}{3} \right]_0^4 \\
 &= \frac{31}{12} + \frac{80}{3} \\
 &= \frac{117}{4}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.11 Calcule el área de la región limitada por las curvas:

$$y = e^{-x}, \quad x = y^2 - 3y + 2 \quad \text{y} \quad \text{la recta} \quad y = 3.$$

Solución. La región se muestra en la Figura 4.13.

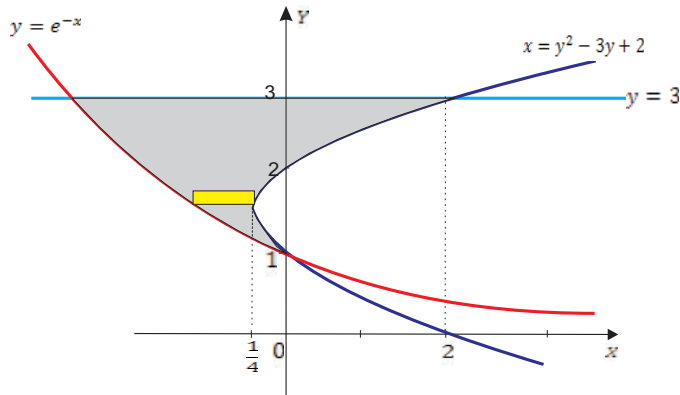


Figura 4.13:

Al considerar el rectángulo genérico perpendicular al eje Y , se tiene $dA = [(y^2 - 3y + 2) - (-\ln y)] dy$. Por lo tanto, cuando y varía desde $y = 1$ hasta $y = 3$, tenemos

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^3 [y^2 - 3y + 2 - (-\ln y)] dy \\
 &= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{3y^2}{2} + 2y + y \ln y - y \right]_1^3 \\
 &= 3 \ln 3 - \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.12 Calcule el área de la región limitada por las curvas:

$$x = y - y^2, \quad y = 4x^2 - 4x, \quad y = 1 - x$$

para $x \geq 0$.

Solución.

La región se muestra en la figura 4.14 y puede ser visto como la unión de dos regiones.

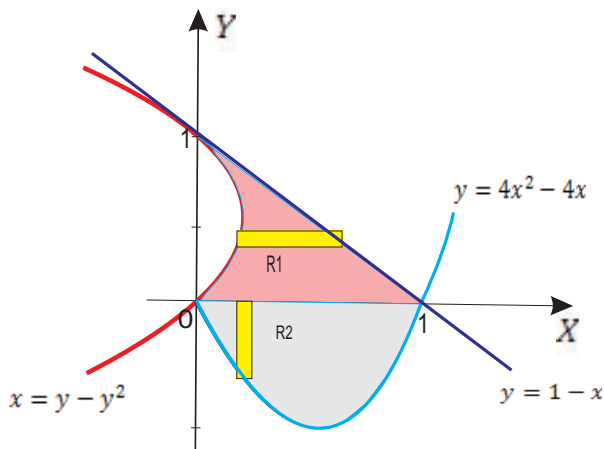


Figura 4.14:

En este caso, para la región R_1 consideramos el rectángulo genérico perpendicular al eje Y , mientras que para la región R_2 consideramos perpendicular al eje X . Así, el área es $A = A_1 + A_2$, o sea

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 [(-y + 1) - (y - y^2)] dy + \int_0^1 [0 - (4x^2 - 4x)] dx \\
 &= \int_0^1 (y^2 - 2y + 1) dy + \int_0^1 (-4x^2 + 4x) dx \\
 &= \left[\frac{y^3}{3} - y^2 + y \right]_0^1 + \left[-\frac{4x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1 – 10 calcule el área de la región limitada por las curvas.

1. $y = -x^2$, $y = x - x^3$
2. $y = x^2 - 1$, $y = |x|$
3. $y = 3x - x^2$, $y = 3x^2 - x^3$

$$4. \ x = -6(y-1)^2, \quad x = y(y-1)(y-7)$$

$$5. \ y = \sqrt[3]{x-1}, \quad y = x-1$$

$$6. \ x = \frac{y}{\sqrt{16-y^2}}, \quad x = 0, \quad y = 3$$

$$7. \ x = |y^2 - 4|, \quad x = 2y + 4$$

$$8. \ x = y^2 - 3y + 1, \quad x + y - 1 = 0$$

$$9. \ y = x - |x^2 - 1|, \quad y = x - 3$$

$$10. \ y = |x^2 - 1| - x, \quad y = -x^2 + 5$$

En los ejercicios 11–16, calcule el área de la región limitada por las curvas.

$$11. \ x^2 - 4x - 4y + 16 = 0, \quad 2y + x - 20 = 0$$

$$12. \ x - e^y = 0, \quad x^2 - 3x + y + 2 = 0, \quad x = 3$$

$$13. \ x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0, \quad x = 4$$

$$14. \ y^2 + 2x - 10 = 0, \quad x - |y| + 1 = 0$$

$$15. \ x^2 - y(y-4)^2 = 0, \quad x^2 - y = 0 \text{ donde } x \geq 0.$$

$$16. \ 3x + \sqrt{4-y} = 0, \quad x^2(x-4) - y = 0, \quad (y-4)^2 - 4x = 0$$

En los ejercicios 17–20, calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función y la recta tangente a la gráfica en el punto dado.

$$17. \ f(x) = x^3, \quad (1, 1)$$

$$18. \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (1, \frac{1}{2})$$

$$19. \ h(x) = x^3 - 2x, \quad (-1, 1)$$

$$20. \ g(x) = \frac{2}{1+4x^2}, \quad (\frac{1}{2}, 1)$$

En los ejercicios 21 y 25, calcule el área de la región comprendida por:

$$21. \text{ la curva } xy^2 - 9x - 8 = 0 \text{ y su asíntota.}$$

$$22. \text{ la curva } e^{-x}\sqrt{x} - y = 0 \text{ y su asíntota.}$$

$$23. \text{ la curva } 2^xy - \sqrt{x} = 0 \text{ y su asíntota.}$$

24. la curva $y = x^3 (4 - x^2)^{1/2}$, para $x \geq 0$, y su asíntota.
 25. las curvas $xy - 1 = 0$ y $x(y^2 + 1) - y = 0$, para $y \geq 1$.

4.2. Area de regiones planas en coordenadas polares

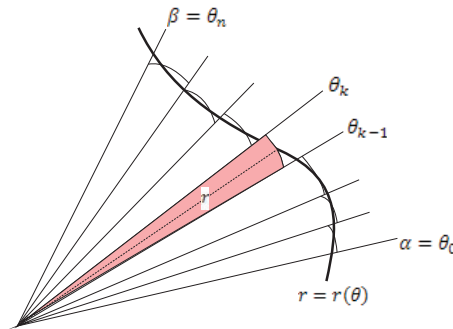


Figura 4.15:

Consideremos la región limitada por la curva $r = r(\theta)$ y las semirectas de ecuaciones $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, tal como se ilustra en la figura 4.15. Si tomamos una partición $\theta_0 = \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$ del intervalo $[\alpha, \beta]$, y en cada subintervalo genérico $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ elegimos un punto arbitrario t_k , entonces el área encerrada por la curva y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ se puede aproximar por la suma

$$\sum_{k=1}^n \text{área}(S_k),$$

donde S_k es el sector circular de radio $r(t_k)$ y ángulo $\theta_k - \theta_{k-1}$. Sabemos que el área del sector circular S_k es dada por

$$\text{área}(S_k) = \frac{1}{2} [r(t_k)]^2 (\theta_k - \theta_{k-1}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \text{área}(S_k) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [r(t_k)]^2 (\theta_k - \theta_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^n [r(t_k)]^2 (\theta_k - \theta_{k-1})}_{\text{Suma de Riemann de la función } r^2(\theta)}. \end{aligned}$$

Aplicando límite, cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \text{área}(S_k) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

La siguiente definición resume este hecho.

Definición 4.1 Sea $r = r(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva y supongamos que r es continua en $[\alpha, \beta]$. El área de la región S limitada por la curva y las semirectas de ecuaciones $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es definida por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

Si la región S es limitada por dos curvas, como lo muestra la figura 4.16, entonces el área es:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)] d\theta.$$

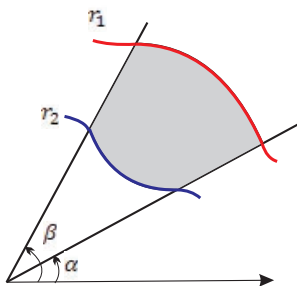


Figura 4.16:

Ejemplo 4.13 Determine el área de la región: exterior a $r = 4\sin(2\theta)$ e interior a $r = 4\cos\theta$.

Solución.

La región se muestra en la Figura 4.17. El rayo en el cual ocurre la intersección entre las curvas se obtiene de la ecuación $8 \sin\theta \cos\theta = 4\cos\theta$; esto es $\theta = -\pi/6, \pi/6$.

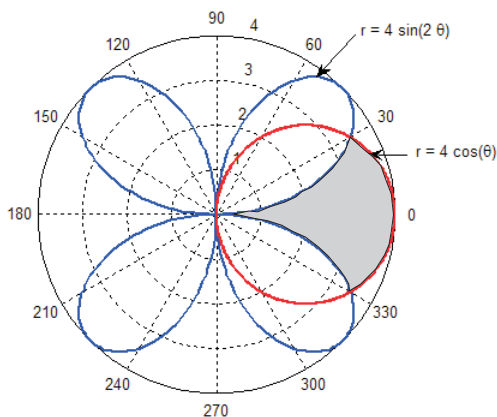


Figura 4.17:

Nótese que la región es simétrica con respecto al eje polar, por lo que es suficiente integrar de 0 a $\pi/6$ y multiplicar por dos.

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (r_2^2 - r_1^2) d\theta \right] \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} [(4 \cos \theta)^2 - (4 \sin(2\theta))^2] d\theta \right] \\
 &= \int_0^{\pi/6} (16 \cos^2 \theta - 16 \sin^2(2\theta)) d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/6} (\cos(2\theta) + \cos(4\theta)) d\theta \\
 &= \left[4 \sin(2\theta) + \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{\pi/6} \\
 &= 3\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.14 Determine el área de la región: exterior a $r = 1 - \cos \theta$ e interior a $r = 1 - \sin \theta$.

Solución.

La región se muestra en la figura 4.18. El rayo en el cual se intersectan las curvas se obtiene de la ecuación $1 - \cos \theta = 1 - \sin \theta$. al resolver se obtienen $\theta = \pi/4, 5\pi/6$.

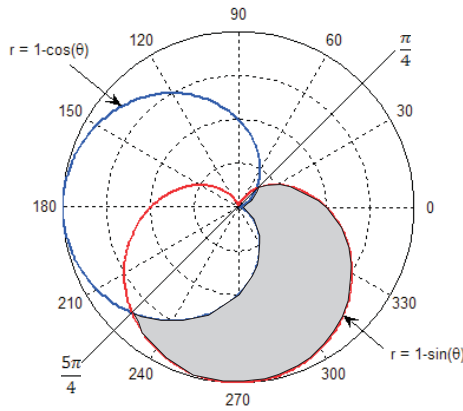


Figura 4.18:

De acuerdo a la información de la figura no se observa simetría de la región, por lo que el área de la región es:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left[(1 - \sin\theta)^2 - (1 - \cos\theta)^2 \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_{5\pi/4}^{2\pi} \left[(1 - \sin\theta)^2 - (1 - \cos\theta)^2 \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (-\cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta) d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{5\pi/4}^{2\pi} (-\cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta) d\theta \\
 &= \sqrt{2} - \frac{5}{4} + \sqrt{2} + \frac{5}{4} \\
 &= 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.15 Calcule el área de la región: exterior a la circunferencia $r = 3\sin\theta$ e interior a la cardioide $r = 1 + \sin\theta$.

Solución.

La región se muestra en la figura 4.19. El rayo en la cual ocurre la intersección de las curvas se obtiene de la ecuación $1 + \sin\theta = 3\sin\theta$, esto es $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$.

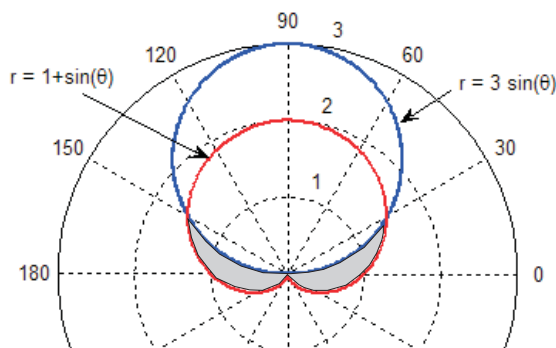


Figura 4.19:

Como la región es simétrica respecto al eje $\pi/2$, y la tangente en el polo para la cardioide es $\theta = -\pi/2$, entonces el área de la región es:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1 + \sin \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (3 \sin \theta)^2 d\theta \right] \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} \left[\frac{3\theta}{2} - 2 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/6} - \frac{9}{2} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/6} \right] \\
 &= 2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{16} \right) - \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16} \right) \right] \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.16 Calcule el área de la región : exterior a $r = \sqrt{2} \sin(2\theta)$ e interior a $r^2 = 3 \cos(2\theta)$.

Solución.

La región se muestra en la figura 4,20, El rayo en las cuales se intersectan las curvas se obtienen de resolver para θ de la ecuación $(\sqrt{2} \sin(2\theta))^2 = 3 \cos(2\theta)$. Efectuando operaciones tenemos

$$(2 \cos(2\theta) - 1)(\cos(2\theta) + 2) = 0, \Rightarrow \cos(2\theta) = \frac{1}{2} \vee \cos(2\theta) = -2.$$

Luego, de $\cos(2\theta) = \frac{1}{2}$ se tiene $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$, $\theta = \pm \frac{5\pi}{6}$.

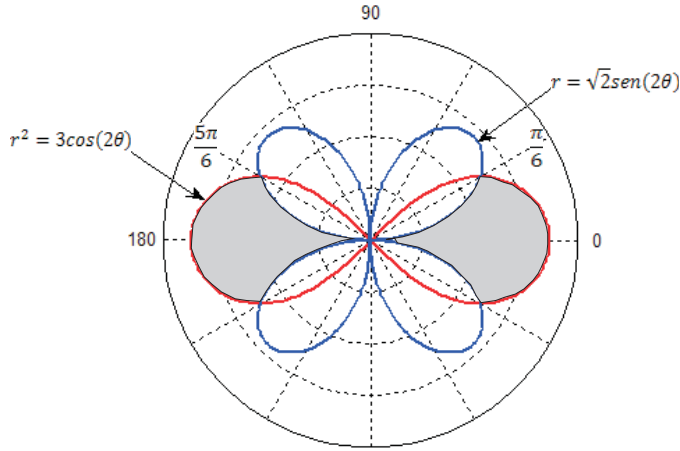


Figura 4.20:

Ahora, dado que la región es simétrica respecto al eje polar y al eje $\frac{\pi}{2}$, podemos calcular el área integrando de $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{6}$ y luego multiplicar por cuatro. Esto es:

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 \cos(2\theta) - 2 \operatorname{sen}^2(2\theta)) d\theta \right] \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 \cos(2\theta) - 1 - \cos(4\theta)) d\theta \\
 &= [3 \operatorname{sen}(2\theta) - 4\theta + \operatorname{sen}(4\theta)]_0^{\pi/6} \\
 &= \frac{7}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.17 Determine el área de la región: interior a $r = -4 \cos \theta$ y exterior a $r = 4 \cos(2\theta)$.

Solución.

La región se muestra en la figura 4.21. Denotando $r_1 = -4 \cos \theta$ y $r_2 = -4 \cos(2\theta)$ equivalente a $r = 4 \cos(2\theta)$. El rayo en el cual se intersectan las curvas se obtienen de la ecuación $r_1 = r_2$, cuya solución es $\theta = 2\pi/3, 2\pi$. Por otro lado, las tangentes en el polo para r_2 son $\theta = \pm\pi/4, \pm3\pi/4, \pm5\pi/4, \pm7\pi/4$.

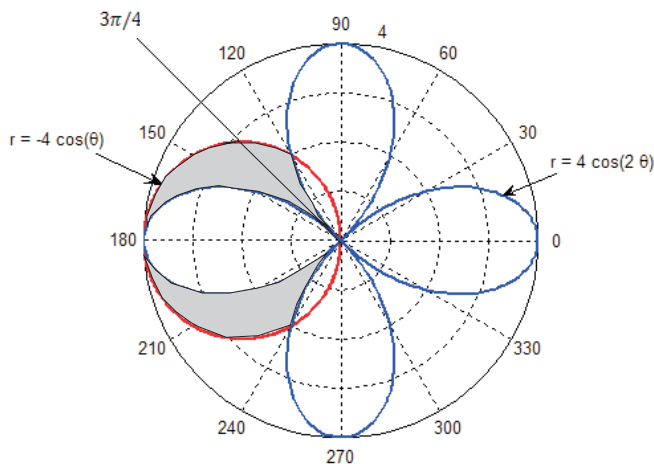


Figura 4.21:

Siendo la región simétrica al eje cuando $\theta = \pi$, el área de la región sombreada es entonces

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{3\pi/4} (r_1^2 - r_2^2) d\theta + \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} (r_1^2 - r_2^2) d\theta \right] \\
 &= \int_{2\pi/3}^{\pi} (r_1^2 - r_2^2) d\theta \\
 &= \int_{2\pi/3}^{\pi} (36 \cos^2 \theta - 36 \cos^2(2\theta)) d\theta \\
 &= 36 \left[\int_{2\pi/3}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta - \int_{2\pi/3}^{\pi} \cos^2(2\theta) d\theta \right] \\
 &= 6\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3} - 6\pi \\
 &= \frac{27}{4}\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.18 Calcule el área de la región: exterior a las curvas $r = -2 \cos \theta$ y $r = 6 \cos \theta$ e interior a $r = 2(1 + \cos \theta)$.

Solución.

La región se muestra en la figura 4.22. Los rayos en las cuales se intersectan las curvas se obtienen de $2(1 + \cos \theta) = 6 \cos \theta$. Esto es, $\theta = -\pi/3, \pi/3$.

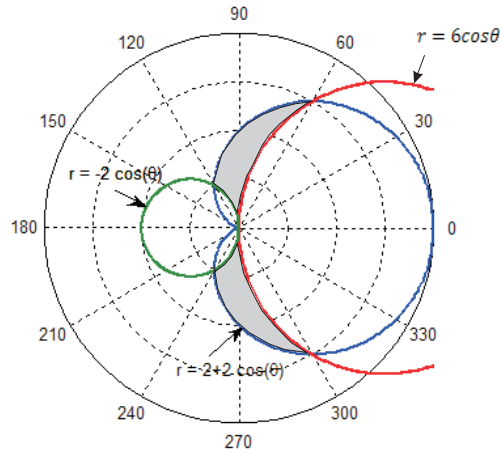


Figura 4.22:

Por otro lado, vemos que la región es simétrica al eje polar y también cuando $\theta = \pi$, por lo que para calcular el área, es suficiente integrar de $[\pi/3, \pi/2]$ y de $[\pi/2, 2\pi/3]$; y luego multiplicar por 2. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[(2 + 2 \cos \theta)^2 - (6 \cos \theta) \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \left[(2 + 2 \cos \theta)^2 - (6 \cos \theta) \right] d\theta \right] \\
 &= - \int_{\pi/3}^{\pi/2} (32 \cos^2 \theta - 8 \cos \theta - 4) d\theta + 4 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + 2 \cos \theta) d\theta \\
 &= 8 [2 \operatorname{sen} (2\theta) + 2 \operatorname{sen} \theta - 3\theta]_{\pi/3}^{\pi/2} + 4 [\theta + 2 \operatorname{sen} \theta]_{\pi/2}^{2\pi/3} \\
 &= \left(16 - 16\sqrt{3} - 4\pi \right) + \left(\frac{2\pi}{3} - 4\sqrt{3} - 8 \right) \\
 &= 8 - 12\sqrt{3} - \frac{5\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encuentre el área de la región encerrada por $r = 1 + 3 \cos \theta$ pero fuera del lazo interior.
2. Encuentre el área de la región: dentro de $r = 2 \cos \theta$ y fuera de $r = 3 \cos(3\theta)$.
3. Determine el área de la región comprendida entre las curvas:
 - a) $r = 2 \cos \theta$ y $r = 2 \sin \theta$
 - b) $r = 1$ y $r = 2 \sin \theta$
 - c) $r = 2$ y $r = 2(1 - \cos \theta)$
 - d) $r = 2(1 + \cos \theta)$ y $r = 2(1 - \cos \theta)$

En los ejercicios 4 – 13 determine el área de la región que se indica:

4. exterior a la curva $r = 6 \cos \theta$ e interior a la curva $r = 2 + 2 \cos \theta$
5. interior a $r^2 = 2 \cos \theta$ y exterior a $r = 1$.
6. interior a la lemniscata $r^2 = 6 \cos(2\theta)$ y exterior a la circunferencia $r = \sqrt{3}$.
7. exterior a las curvas $r = 2 \sin \theta$ y $r = 2 - 2 \cos \theta$; pero interior a la curva $r = 1$.
8. interior a $r = \sqrt{2} \sin \theta$ y exterior a $r^2 = \cos 2\theta$.
9. interior a $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ y exterior a $r^2 = -9 \cos 2\theta$.
10. exterior a $r = 4 \cos \theta$, pero interior a $r = 1 + 2 \cos \theta$.
11. interior a $r = 2$ y exterior a $r^2 = 8 \cos^2 \theta - 4$ limitada por $\theta = \pi/3$.
(Considere la región en el primer cuadrante)
12. interior a $r^2 = 4 \sin 2\theta$ y $r^2 = 4\sqrt{3} \cos 2\theta$.
13. interior a $r = 1$ y exterior a $r = 4 \sin \theta \cos \theta$.
14. Obtenga el área del riso interior de la curva $r = 1 + 2 \cos \theta$.
15. Obtenga el área de la región común de las curvas: $r = 3 + 2 \cos \theta$ y $r = 2$.

4.3. Volumen de sólidos de revolución

En esta sección vamos a calcular el volumen de los **sólidos de revolución**, los cuales se obtienen cuando una región plana está por completo en un lado de una recta fija en su plano y se hace rotar alrededor de esa recta. La recta fija se denomina **eje** del sólido de revolución.

Los métodos clásicos para calcular volúmenes de revolución son: método del disco circular, método del anillo y método de la lámina cilíndrica; en cada una ellas en lugar de aplicar de manera mecánica la fórmulas para obtener volúmenes, se sugiere que en cada problema vaya a través del proceso que conduce a ella.

4.3.1. Método del disco circular

Teorema 4.3 Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$. El volumen del sólido de revolución S generado por rotación alrededor del eje X de la región limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, es dada por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (4.3)$$

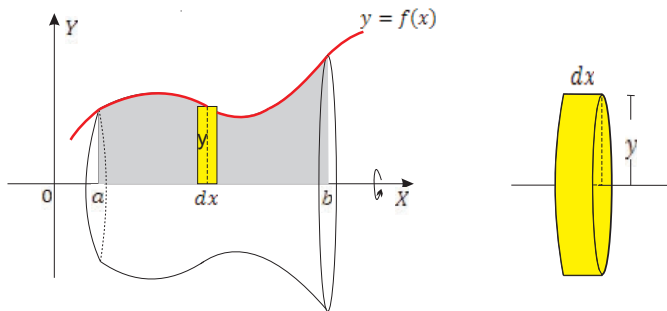


Figura 4.23:

Prueba.

Consideremos el rectángulo genérico de base dx y altura $y = f(x)$, como se muestra en la figura 4.23. Al rotar este rectángulo alrededor del eje X , se genera el sólido de revolución llamado cilindro o disco de radio $y = f(x)$ y altura dx , área de la base πy^2 y volumen

$$dV = \pi y^2 dx = \pi [f(x)]^2 dx$$

El volumen del sólido S que se genera al girar la región plana alrededor del eje X , es una suma infinita de los volúmenes de las particiones y que denotamos por definición como

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Teorema 4.4 Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[c, d]$ tal que $f(y) \geq 0$. El volumen del sólido de revolución S generado por rotación alrededor del eje Y de la región limitada por la gráfica de f , el eje Y y las rectas $y = c$ e $y = d$, es dada por

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy. \quad (4.4)$$

La figura 4.24 muestra la región a rotar alrededor del eje Y .

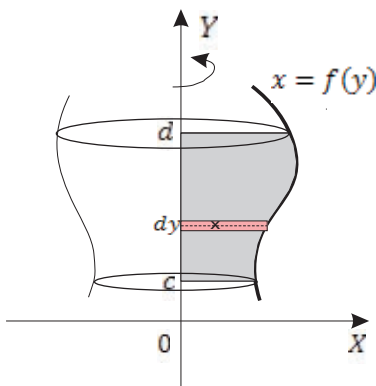


Figura 4.24:

Ejemplo 4.19 Calcule el volumen del sólido generado al hacer rotar alrededor del eje X , la región limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución.

En la figura 4.25 se muestra la región.

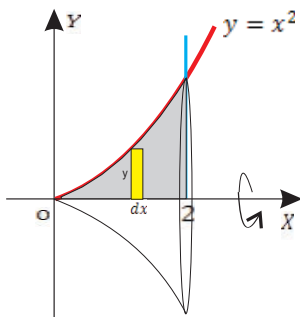


Figura 4.25:

Al rotar el rectángulo elemental alrededor del eje X se obtiene el disco circular de radio $= y$, y volumen $dV = \pi y^2 dx$. Cuando x varía desde $x = 0$ hasta $x = 2$, se obtiene un sólido cuyo volumen es

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\
 &= \frac{32\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

En lo sucesivo, solamente por cuestiones de comodidad, omitiremos de colocar la unidad del volumen.

Ejemplo 4.20 Calcule el volumen del sólido generado al hacer rotar alrededor del eje Y , la región limitada por la curva $y = x^3 + 1$ y las rectas $x = 0$ y $y = 2$.

Solución.

En la figura 4.26 se muestra la región. Al rotar el rectángulo elemental alrededor del eje Y se obtiene el disco circular de radio $= x$, y volumen $dV = \pi x^2 dy$.

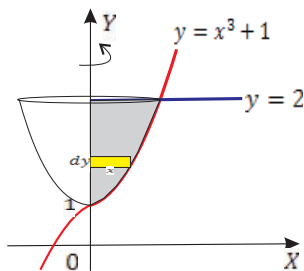


Figura 4.26:

Cuando y varía desde $y = 1$ hasta $y = 2$, obtiene un sólido cuyo volumen es

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^2 x^2 dy = \pi \int_1^2 \left(\sqrt[3]{y-1} \right)^2 dy \\
 &= \pi \int_1^2 (y-1)^{2/3} dy \\
 &= \pi \left[\frac{3}{5} (y-1)^{5/3} \right]_1^2 \\
 &= \frac{3}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.21 Calcule el volumen del sólido generado al hacer rotar la región limitada por la curva $y = x^2 e^{-x^2}$ alrededor de su asíntota.

Solución.

En la Figura 4.27 se muestra la región y es simétrica respecto al eje Y .

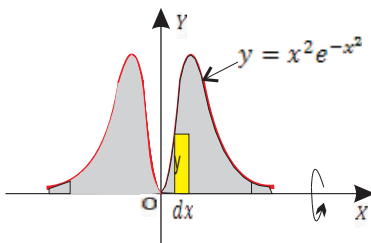


Figura 4.27:

La recta $y = 0$ constituye la asíntota de la curva, pues $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$.

Al rotar el rectángulo elemental alrededor del eje X , se obtiene un disco circular de radio $= y$, y volumen $dV = \pi y^2 dx$. Cuando x varía desde $-\infty$ a $+\infty$, se obtiene un sólido cuyo volumen es entonces

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx = 2\pi \int_0^{\infty} x^4 e^{-2x^2} dx \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \int_0^{\infty} t^{3/2} e^{-t} dt, \text{ donde } t = 2x^2 \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}\pi^{3/2}}{32}. \end{aligned}$$

4.3.2. Método del anillo circular

El método del anillo circular se utiliza cuando se trata de calcular el volumen de un sólido de revolución con un agujero. Este tipo de sólidos aparecen cuando la región plana que gira y el eje de revolución no están juntos.

Teorema 4.5 Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ó $f(x) \leq g(x) \leq 0$. El volumen del sólido de revolución S generado por rotación alrededor del eje X de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, es dada por

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx. \quad (4.5)$$

Prueba.

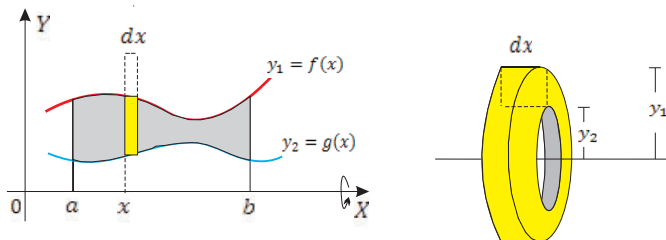


Figura 4.28:

Consideremos rectángulo elemental determinado por x y las ordenadas $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$, como se muestra en la figura 4.28. Al rotar el rectángulo elemental alrededor del eje X , se genera el sólido de revolución en forma de un anillo, como el que se ilustra en el lado derecho de la figura, cuya base tiene un área $A(x) = \pi(y_1^2 - y_2^2)$, y cuyo volumen es

$$dV = A(x) dx = \pi(y_1^2 - y_2^2) dx.$$

Así que, el volumen del sólido de revolución S obtenido es una suma infinita de los volúmenes de las particiones a la que denotamos por definición como:

$$V = \pi \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx.$$

Teorema 4.6 Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[c, d]$ tal que $f(y) \geq g(y) \geq 0$ ó $f(y) \leq g(y) \leq 0$. El volumen del sólido de revolución S generado por rotación alrededor del eje Y , la región limitada por las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$, el eje Y y las rectas $y = c$ y $y = d$, es dada por

$$V = \pi \int_c^d [f^2(y) - g^2(y)] dy. \quad (4.6)$$

Ejemplo 4.22 Determine el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$, alrededor de la recta: a) $y = 5$
b) $y = -2$

Solución.

En la figura 4.29 se muestra la región.

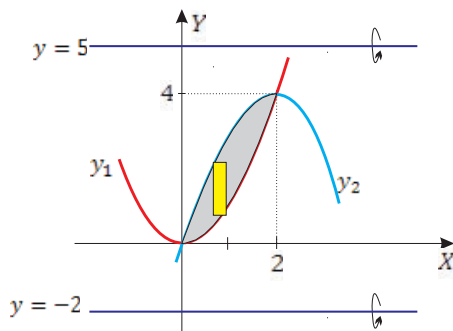


Figura 4.29:

Es inmediato encontrar que los puntos de intersección entre las curvas $y_1 = x^2$ e $y_2 = 4x - x^2$ son $(0, 0)$ y $(2, 4)$.

a) Al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $y = 5$, se obtiene un anillo circular que tiene volumen

$$dV = \pi \left[(5 - y_1)^2 - (5 - y_2)^2 \right] dx.$$

Cuando x varía desde $x = 0$ hasta $x = 2$, se obtiene un sólido cuyo volumen es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left[(5 - x^2)^2 - (5 - 4x + x^2)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_0^2 (8x^3 - 36x^2 + 40x) dx \\ &= \pi \left[2x^4 - 12x^3 + 20x^2 \right]_0^2 \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

b) Al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $y = -2$, se obtiene un anillo circular que tiene volumen

$$dV = \pi \left[(y_2 + 2)^2 - (y_1 + 2)^2 \right] dx.$$

Cuando x varía desde $x = 0$ hasta $x = 2$, se obtiene un sólido cuyo volumen es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left[(4x - x^2 + 2)^2 - (x^2 + 2)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_0^2 (-8x^3 + 8x^2 + 16x) dx \\ &= \pi \left[-2x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{64}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.23 Determine el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las curvas $y = -\ln x$ e $y = x^2 - 2x + 1$, y la recta $x = 2$, alrededor de la recta: a) $x = -1$ b) $x = 3$.

Solución.

En la figura 4.30 se muestra la región a rotar. Los puntos de intersección entre las curvas y la recta $x = 2$, son $(1, 0)$, $(2, -\ln 2)$ y $(2, 1)$.

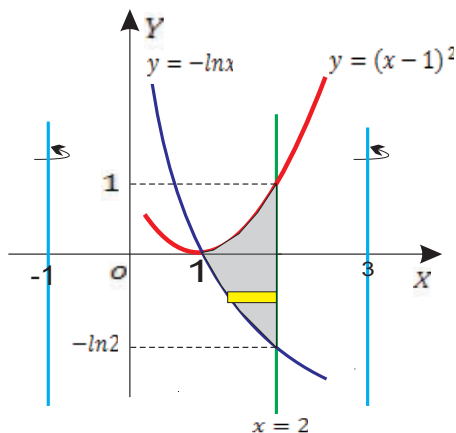


Figura 4.30:

a) Al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $x = -1$, se obtiene un anillo circular que tiene volumen $dV = \pi \left(9 - (x+1)^2 \right) dy$. Cuando y varía desde $y = -\ln 2$ hasta $y = 1$, es necesario usar dos integrales para expresar el volumen del sólido. En efecto, denotando $x_1 = e^{-y}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{y}$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-\ln 2}^0 \left(9 - (e^{-y} + 1)^2 \right) dy + \pi \int_0^1 \left(9 - (\sqrt{y} + 2)^2 \right) dy. \\
 &= \pi \int_{-\ln 2}^0 (8 - e^{-2y} - 2e^{-y}) dy + \pi \int_0^1 (5 - 4\sqrt{y} - y) dy \\
 &= \frac{11}{6}\pi + \pi \left(8\ln 2 - \frac{7}{2} \right).
 \end{aligned}$$

b) a) Al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $x = 3$, se obtiene un anillo circular que tiene volumen $dV = \pi \left((3-x)^2 - 1^2 \right) dy$; pero cuando y

varía desde $y = -\ln 2$ hasta $y = 1$, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-\ln 2}^0 \left((3 - x_1)^2 - 1^2 \right) dy + \pi \int_0^1 \left((3 - x_2)^2 - 1^2 \right) dy \\
 &= \pi \int_{-\ln 2}^0 \left((3 - e^{-y})^2 - 1 \right) dy + \pi \int_0^1 \left((2 - \sqrt{y})^2 - 1 \right) dy \\
 &= \pi \int_{-\ln 2}^0 (e^{-2y} - 6e^{-y} + 8) dy + \pi \int_0^1 (y - 4\sqrt{y} + 3) dy \\
 &= \frac{5}{6}\pi + \pi \left(8 \ln 2 - \frac{9}{2} \right) \\
 &= 2\pi \left(4 \ln 2 - \frac{11}{6} \right).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.24 Determine el volumen del sólido generado al rotar alrededor de la recta $y = -1$, la región limitada por la parábola $x^2 + 4y - 9 = 0$, la recta tangente L en el punto $(1, b)$ y la recta $y = 0$.

Solución.

En la figura 4.31 se muestra la región a rotar.

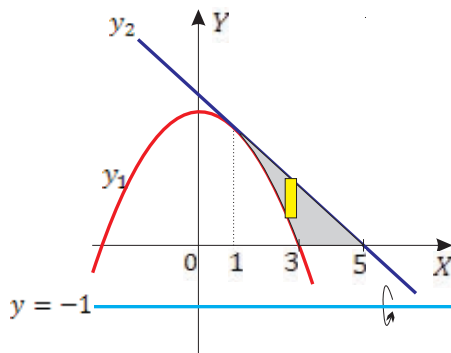


Figura 4.31:

Primero determinaremos la ecuación de la recta tangente L a la curva $y_1 = (9 - x^2)/4$ en el punto $(1, b)$. Veamos:

Al reemplazar el punto $(1, b)$ en la ecuación de la curva se obtiene $b = 2$. Por otro lado, la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la curva es $y' = -x/2$. Entonces, en $x = 1$ se tiene $m_L = -1/2$. Así, la ecuación de la recta L es $y_2 = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$.

Al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $y = -1$ se obtiene un anillo circular cuyo volumen es: $dV = \left[(y_2 + 1)^2 - (y_1 + 1)^2 \right] dx$ para $x \in [1, 3]$, y disco circular cuyo volumen es $dV = \left[(y_2 + 1)^2 - 1^2 \right] dx$ para $x \in [3, 5]$. Por tanto, el volumen del sólido generado cuando x varía de $x = 1$ hasta $x = 5$, es

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^3 \left[(y_2 + 1)^2 - (y_1 + 1)^2 \right] dx + \pi \int_3^5 \left[(y_2 + 1)^2 - 1^2 \right] dx \\
 &= \pi \int_1^3 \left[\left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{9-x^2}{4} + 1 \right)^2 \right] dx + \pi \int_3^5 \left[\left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{2} + 1 \right)^2 - 1 \right] dx \\
 &= \pi \int_1^3 \left(-\frac{1}{16}x^4 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{27}{16} \right) dx + \pi \int_3^5 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{45}{4} \right) dx \\
 &= \frac{13}{5}\pi + \frac{8}{3}\pi \\
 &= \frac{21}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.25 Determine el volumen del sólido generado al rotar alrededor de la recta $x = -1$, la región limitada por las curvas $y = \frac{1}{2}x^2$ y $\sqrt{x+y} = y$.

Solución.

En la figura 4.32 se muestra la región a rotar y los puntos de intersección entre las curvas.

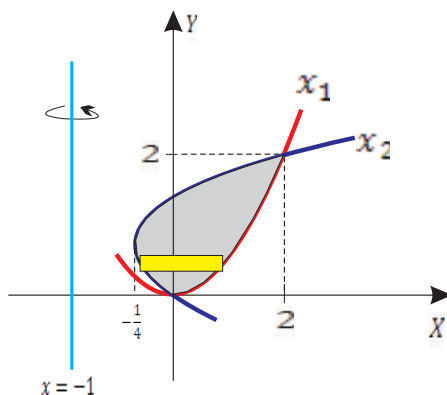


Figura 4.32:

Rescribiendo las ecuaciones como $x_1 = \sqrt{2y}$ y $x_2 = y^2 - y$. Al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $x = -1$, se obtiene un anillo circular

cuyo volumen es

$$dV = \pi \left[(x_1 + 1)^2 - (x_2 + 1)^2 \right] dy.$$

Por tanto, el volumen del sólido generado cuando y varía desde $y = 0$ hasta $y = 2$, es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left[(x_1 + 1)^2 - (x_2 + 1)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^2 \left[(\sqrt{2y} + 1)^2 - (y^2 - y + 1)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^2 (4y + 2\sqrt{2}\sqrt{y} - 3y^2 + 2y^3 - y^4) dy \\ &= \frac{104}{15} \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.26 Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje Y , la región limitada por la curva $x = \sqrt{y}e^{-y} + 2$ y su asíntota.

Solución.

En la figura 4.33 se muestra la región. Es fácil ver que la recta $x = 2$ es la asíntota de la curva dada.

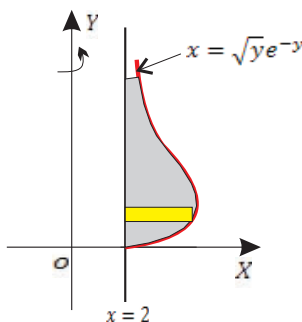


Figura 4.33:

Al rotar el rectángulo elemental alrededor del eje Y se obtiene un anillo circular, cuyo volumen es $dV = \pi \left[(x)^2 - (2)^2 \right] dy$.

Por tanto, el volumen del sólido generado cuando y varía desde $y = 0$ hasta $+\infty$, es:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\infty} \left[(x)^2 - (2)^2 \right] dy = \pi \int_0^{\infty} \left[(\sqrt{y}e^{-y} + 2)^2 - (2)^2 \right] dy \\
 &= \pi \left[\int_0^{\infty} ye^{-2y} dy + 4 \int_0^{\infty} y^{1/2} e^{-y} dy \right] \\
 &= \pi \left[\frac{1}{4} \Gamma(2) + 4 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right] \\
 &= \pi \left[\frac{1}{4} + 2\sqrt{\pi} \right].
 \end{aligned}$$

4.3.3. Método de lámina cilíndrica

Para muchos problemas, el método de la lámina cilíndrica (corteza cilíndrica) es más fácil de aplicar que el método de los discos o el del anillo.

Teorema 4.7 Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$. El volumen del sólido de revolución S generado por rotación alrededor del eje Y de la región limitada por las curvas $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, es dada por

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

Prueba.

En la figura 4.34 se muestra un rectángulo elemental. Al rotar alrededor del eje Y genera un tubo cilíndrico de espesor dx , radio en la base $= x$, altura $= y_1 - y_2$; cuyo volumen aproximado es

$$\begin{aligned}
 dV &= (\text{perímetro de la base}) (\text{ancho}) (\text{altura}) \\
 &= (2\pi x) (dx) (y_1 - y_2)
 \end{aligned}$$

Por tanto, el volumen del sólido de revolución S obtenido cuando x varía desde $x = a$ hasta $x = b$, es

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

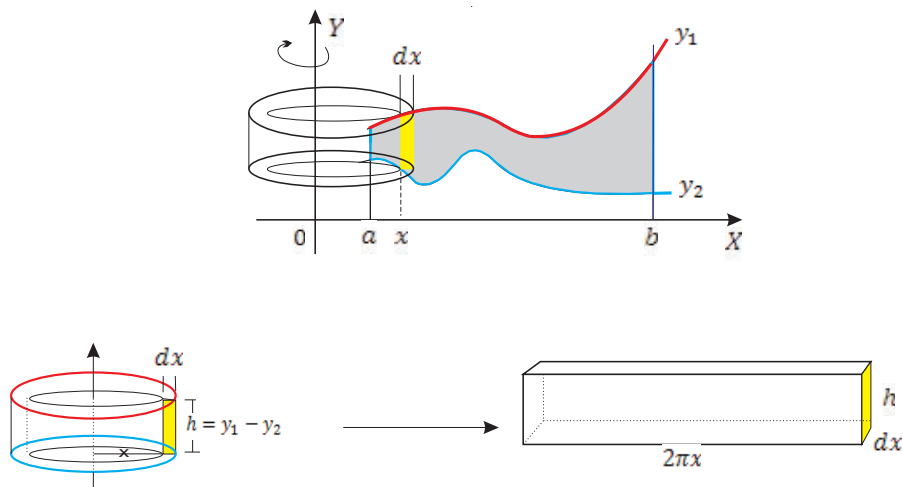


Figura 4.34:

Teorema 4.8 El volumen del sólido de revolución S generado por rotación alrededor del eje X de la región limitada por las curvas $x_1 = f(y)$ y $x_2 = g(y)$ (con $f(y) \geq g(y)$) y las rectas verticales $y = c$ y $y = d$, es dado por la fórmula

$$V = 2\pi \int_c^d y [f(y) - g(y)] dy.$$

Observación 4.1 Comparación de los métodos anillo y corteza.

Para el método del anillo el rectángulo representativo es siempre perpendicular al eje de rotación; mientras que para el método de la corteza el rectángulo representativo es paralelo al eje de rotación.

Ejemplo 4.27 Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región limitada por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $y = 3 - x$, alrededor de la recta $x = -4$.

Solución.

En la figura 4.35 se muestra la región. Los puntos de intersección entre $y_1 = -x^2 - 3x + 6$ y $y_2 = 3 - x$ son $(-3, 6)$ y $(1, 2)$.

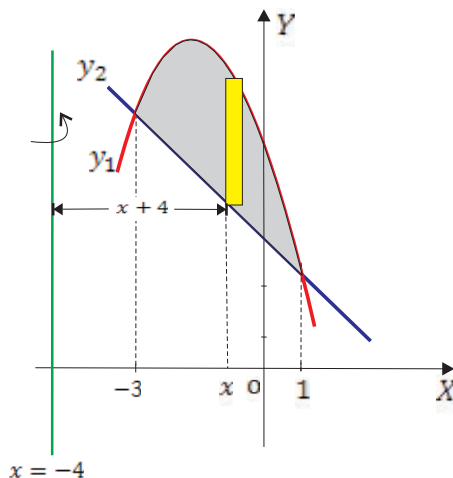


Figura 4.35:

La lámina cilíndrica elemental obtenido al rotar rectángulo elemental alrededor de la recta $x = -4$, tiene radio $= x + 4$, altura $= y_1 - y_2$, y volumen $dV = 2\pi (x + 4) (y_1 - y_2) dx$. Por tanto, el volumen del sólido generado cuando x varía desde $x = -3$ hasta $x = 1$, es:

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_{-3}^1 (x + 4) (-x^2 - 2x + 3) dx \\
 &= 2\pi \int_{-3}^1 (-x^3 - 6x^2 - 5x + 12) dx \\
 &= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} - 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 12x \right]_{-3}^1 \\
 &= 64\pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.28 Determine el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las curvas $y = -\ln x$ e $y = (x - 1)^2$, y la recta $x = 2$, alrededor de la recta $x = 3$.

Solución. En la figura 4.36 se muestra la región. Si $y_1 = -\ln x$, $y_2 = (x - 1)^2$, entonces la lámina cilíndrica elemental obtenido al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $x = 3$, tiene radio $= 3 - x$, altura $= y_2 - y_1$, y volumen $dV = 2\pi (3 - x) (y_2 - y_1) dx$.

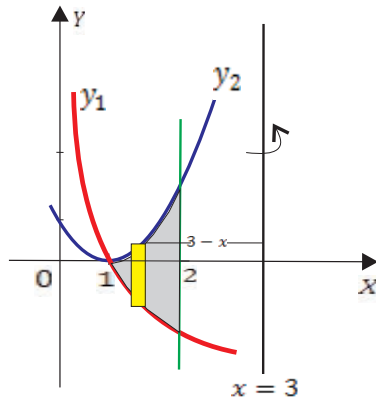


Figura 4.36:

Por tanto, el volumen del sólido generado cuando x varía desde $x = 1$ hasta $x = 2$, es

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_1^2 (3-x)(y_2 - y_1) dx \\
 &= 2\pi \int_1^2 (3-x)(x^2 - 2x + 1 - (-\ln x)) dx \\
 &= 2\pi \int_1^2 (3\ln x - 7x - x\ln x + 5x^2 - x^3 + 3) dx \\
 &= 2\pi \left[3x(\ln x) - \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} + 3x \right]_1^2 \\
 &= 2\pi \left(4\ln 2 - \frac{11}{6} \right).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.29 Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región limitada por las curvas $x = e^y + 1$ y $3y^2 - 6y = x - 2$ y la recta $y = 2$, alrededor de la recta: a) $y = -2$ b) $y = 3$.

Solución. En la figura 4.37 se muestra la región a rotar.

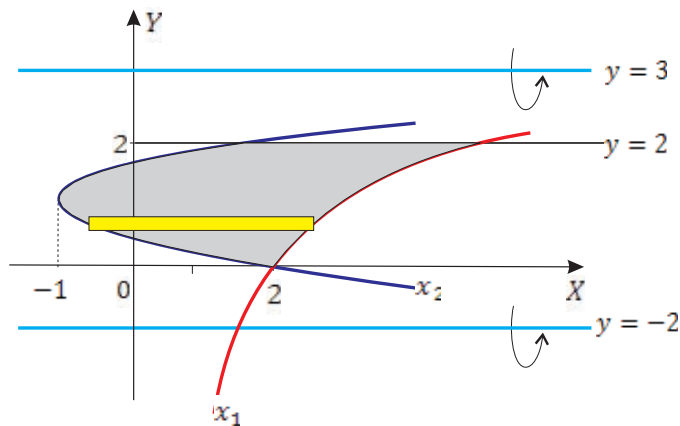


Figura 4.37:

Sea $x_1 = e^y + 1$ y $x_2 = 3y^2 - 6y + 2$.

a) La lámina cilíndrica elemental obtenido al rotar el rectángulo elemental alrededor de la recta $y = -2$, tiene radio $= y + 2$, altura $= x_1 - x_2$, y volumen $dV = 2\pi (y + 2) (x_1 - x_2) dy$. Por lo tanto, el volumen del sólido generado cuando y varía desde $y = 0$ hasta $y = 2$, es:

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^2 (y + 2) (x_1 - x_2) dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 (y + 2) (e^y + 1 - 3y^2 + 6y - 2) dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 (11y + 2e^y + ye^y - 3y^3 - 2) dy \\
 &= 2\pi \left[\frac{11y^2}{2} + 2e^y + e^y (y - 1) - \frac{3y^4}{4} - 2y \right]_0^2 \\
 &= 2\pi (3e^2 + 5).
 \end{aligned}$$

b) Cuando la lámina cilíndrica elemental rota alrededor de la recta $y = 3$, tiene radio $= 3 - y$, altura $= x_1 - x_2$, y volumen $dV = 2\pi (3 - y) (x_1 - x_2) dy$. Entonces, el volumen del sólido generado cuando y varía desde $y = 0$ hasta $y = 2$, es:

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^2 (3-y)(x_1-x_2) dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 (3-y)(e^y+1-3y^2+6y-2) dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 (19y+3e^y-ye^y-15y^2+3y^3-3) dy \\
 &= 2\pi \left[\frac{19y^2}{2} + 3e^y + e^y(y-1) - 5y^3 + -\frac{3y^4}{4} - 3y \right]_0^2 \\
 &= 4\pi e^2.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.30 Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje Y , la región comprendida por la curva $y = |x|e^{-x}$ y su asíntota

Solución.

En la figura 4.38 se muestra la región a rotar.

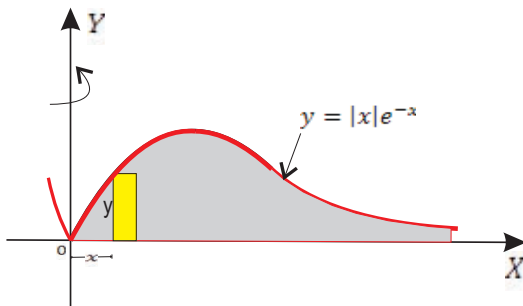


Figura 4.38:

La lámina cilíndrica elemental obtenido al rotar el rectángulo elemental alrededor del eje Y , tiene radio $= x$, altura $= y$, y volumen $dV = 2\pi xy dx$. Por tanto, el volumen del sólido generado cuando x varía desde $x = 0$ hasta $+\infty$, es

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^{\infty} x |x| y dx \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \\
 &= 2\pi \Gamma(3) \\
 &= 4\pi.
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1 – 4, use el método del anillo para determinar el volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar la región limitada por las curvas, alrededor de la recta $y = 4$.

1. $y = x, \quad y = 3, \quad x = 0$

2. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

3. $y = \frac{4}{x+1}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$

4. $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 4, \quad x = 0$

En los ejercicios 5 – 7, use el método del anillo para determinar el volumen del sólido generado al hacer rotar la región limitada por las curvas, alrededor de la recta $x = 5$.

5. $y = 5 - x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

6. $xy = 5, \quad y = 2, \quad y = 5, \quad x = 5$

7. $y = x^2 + 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = 2$

En los ejercicios 8 – 11, use el método de la lámina cilíndrica para obtener el volumen del sólido generado al hacer rotar la región limitada por las curvas, alrededor de la recta dada.

8. $(y - 2)^2 = 4 - x, \quad x = 0 \quad \text{alrededor de la recta } y = 0.$

9. $x^2 + 2y = 0, \quad y^3 + y^2 - 2x = 0 \quad \text{alrededor de la recta } y = 0.$

10. $y^2 + 2x = 0, \quad x^3 + x^2 - 2y = 0 \quad \text{alrededor de la recta } x = 1.$

11. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4 \quad \text{alrededor de la recta } x = 6.$

En los ejercicios 12 – 22, obtenga el volumen del sólido generado al hacer rotar la región limitada por las curvas, alrededor de la recta dada.

12. $y = x^3 + x + 1, \quad y = 1, \quad x = 1 \quad \text{alrededor de la recta } x = 2.$

13. $x = e^{-y}, \quad y = x^2 - 2x + 1, \quad \text{y la recta } x = 2 \quad \text{alrededor del eje } Y$

14. $y = 4x^2 - x^3, \quad y = x^3 \quad \text{alrededor de la recta } y = -3.$

15. $x = (y - 1)^3, \quad y = 1 - \sqrt{x}, \quad x = 1 \quad \text{alrededor de la recta } x = 1.$

16. $y = |x^2 - 2x - 3|$, $y + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x - 4 = 0$ alrededor de la recta $x = 1$.
17. $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, $x = 0$, $y = 6$ alrededor de la recta $y = -1$.
18. $y = x^2(x - 2)$, $y = -x(x - 1)(x - 2)$ alrededor de la recta $x = 3$.
19. $y = -x^2 + 3x$, $y = -x^3 + 3x^2$ alrededor de la recta $y = -2$.
20. $x^3 + x^2 - 2y = 0$, $y^2 + 2x = 0$ alrededor de la recta $x = 0$
21. $y = \cos^2 x$, $y = 4$, y la recta $x = 2\pi$ alrededor de la recta $y = 4$
22. $y = 3 - \operatorname{sen} x$, $x \in [0, \pi]$ y la recta $y = 3$ alrededor de la recta $y = -2$
23. Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el cisoide $y^2 = \frac{x^3}{4 - x}$ alrededor de su asíntota.
24. Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región comprendida por la curva $y = e^{-x}\sqrt{x} + 1$ y la recta $y = 1$, alrededor de la recta $y = 0$
25. Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la gráfica de la función $f(x) = x^2e^{-x^2}$ alrededor de su asíntota.
26. Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región comprendida por la curva $y = x^3e^{-x^2} + 1$, y la recta $y = 1$, alrededor de la recta $x = 0$.
27. Sea D la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x + 2$, la recta tangente en el punto donde la función f tiene un extremo y la recta tangente a la gráfica de f con pendiente 6. Determine el volumen del sólido generado al rotar la región D alrededor de la recta: a) $y = -1$ b) $x = 3$.
28. Sea S , la región limitada por: la curva $\mathcal{C} : x^2 + 4y - 9 = 0$, la recta tangente a esta curva $\mathcal{C}$ en el punto $(1, b)$ y el eje de abscisas. Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región S alrededor de la recta $y = -3$.
29. Un sólido de revolución, S , es generado al hacer rotar alrededor del eje Y la región limitada por la curva $y = x(4 - x)$ y la recta $y = ax$, $a < 0$. Si el volumen de S es 216π , halle el valor de a .

30. Se genera un sólido haciendo girar en torno al eje Y la región limitada por $y = \sqrt{9 - x^2}$ y el eje X . Se perfora en el sólido un agujero a lo largo del eje de revolución, de manera tal que se desaloja de él es un tercio del volumen total. Determine el diámetro del agujero.

4.4. Longitud del arco de una curva plana

Alguna vez se ha preguntado ¿cuánto mide uno de los cables que cuelga de un puente? ó ¿cuánto mide el cable de la electricidad que va de un poste a otro? Para calcular la longitud de curvas planas definidas por funciones o por parametrizaciones se usan las integrales definidas.

Definición 4.2 Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si existe un número L tal que

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i),$$

donde:

$P_i = (x_i, y_i)$ son puntos de la curva $y = f(x)$,

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$\|\Delta\| = \max \Delta x_i$.

entonces el número L se llama la **longitud de arco** de la curva $y = f(x)$ desde el punto $A = (a, f(a))$ hasta el punto $B = (b, f(b))$.

Interpretación geométrica

En la figura 4.39 se muestra la curva $y = f(x)$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$.

La longitud de la línea poligonal determinado por los puntos P_i , podemos representar por

$$\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$$

Cuando los puntos de la partición x_{i-1} e x_i se encuentra cada vez más cerca, la norma de la partición $\|\Delta\| = \max \Delta x_i$ se hace mas pequeño. Lo que implica que la poligonal asociada a tales puntos se ajusta a la curva; y por consiguiente podemos pensar que el límite de las longitudes de las poligonales así obtenidas representa la longitud del arco de la curva.

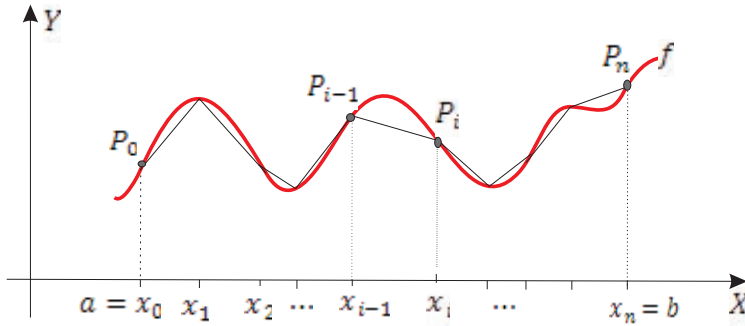


Figura 4.39:

4.4.1. Longitud del arco en coordenadas rectangulares

Teorema 4.9 Sea $y = y(x)$ una función tal que $\frac{dy}{dx}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la longitud del arco de la curva entre dos puntos con abscisas $x = a$ y $x = b$, es dada por

$$L = \int_a^b ds, \quad (4.7)$$

donde $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ es la diferencial de la longitud del arco de la curva.

Prueba.

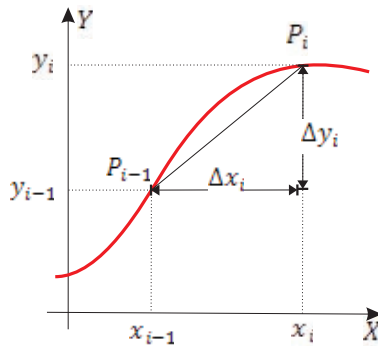


Figura 4.40:

Consideremos la longitud $\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i)$ de la poligonal generada por los puntos $P_i = (x_i, y_i)$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Sean $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, tal como se muestra en la figura 4.40. Entonces,

$$\begin{aligned} d(P_{i-1}, P_i) &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \end{aligned}$$

Como $\Delta y_i = y_i(x_i) - y_{i-1}(x_{i-1}) = \frac{d}{dx}y(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{d}{dx}y(\xi_i)\Delta x_i$ para algún $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, por el teorema del valor medio se sigue que

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(\xi_i)\right]^2} \Delta x_i$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(\xi_i)\right]^2} \Delta x_i.$$

Ahora, pasando a límite cuando $\|\Delta\|$ tiende a $+\infty$ tenemos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(\xi_i)\right]^2} \Delta x_i \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.31 Calcule la longitud del arco de la curva $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Solución.

Tenemos: $\frac{dy}{dx} = 2x$, $ds = \sqrt{1 + (2x)^2}dx$. Luego, al reemplazar en la fórmula (4.7) sigue los siguientes:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx, \quad \text{haciendo } 2x = \tan \theta \\ &= \frac{1}{4} \left[2x\sqrt{1 + 4x^2} + \ln \left| \sqrt{1 + 4x^2} + 2x \right| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ &\approx 1.48u. \end{aligned}$$

En lo sucesivo, por cuestiones de comodidad, omitiremos de colocar las unidades de longitud.

Ejemplo 4.32 Calcule la longitud del arco de la curva

$$y = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} \right), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

Solución.

Calculando la derivada $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$ y luego sustituyendo en la fórmula (4.7), tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right)^2} dx \\ &= \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{4} \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^2} \right)} dx = \int_{1/2}^2 \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right]_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24} \right) \\ &= \frac{33}{16}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.33 Determine la longitud del lazo de la curva $9y^2 = x(x-3)^2$.

Solución.

En la figura 4.41 se muestra la gráfica del lazo de la curva.

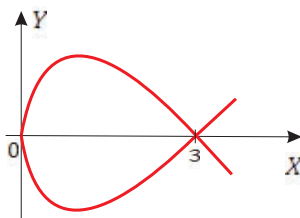


Figura 4.41:

Es fácil ver que los interceptos ocurren cuando $x = 0$ y $x = 3$. Despejando la variable y en términos de x , tenemos

$$y = \frac{\sqrt{x}}{3}(x-3), \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right).$$

Dado que la curva es simétrica respecto al eje X , la longitud del lazo de la curva es dada por:

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = 2 \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right)^2} dx \\ &= 2 \int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}} dx = 2 \int_0^3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Teorema 4.10 Sea $x = x(y)$ una función tal que $\frac{dx}{dy}$ es continua en el intervalo cerrado $[c, d]$. Entonces la longitud del arco de la curva entre dos puntos con ordenadas $y = c$ y $y = d$, es dada por

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy. \quad (4.8)$$

Prueba.

La demostración es similar al teorema 4.9.

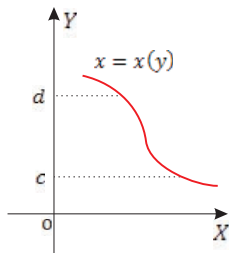


Figura 4.42:

Ejemplo 4.34 Calcule la longitud del arco de la parábola $y = -2\sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

Solución.

Tenemos $x = \frac{1}{4}y^2$, y cuando $x = 0$ y $x = 4$ se tiene $y = 0$ e $y = -4$, respectivamente. Luego, los cálculos respectivos es como sigue:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{-4}^0 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_{-4}^0 \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-4}^0 \sqrt{4 + y^2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 + y^2} + 2 \ln \left| y + \sqrt{4 + y^2} \right| \right]_{-4}^0 \\
 &= \ln 2 - \ln (2\sqrt{5} - 4) + 2\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.35 Calcule la longitud del arco de la curva

$$x^2 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 0, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

Solución.

En la figura 4.43 se muestra la curva.

Despejando la variable x en términos de y , tenemos $x = (y - 1)^{3/2}$. Cuando $x = 0$ y $x = 8$, se tiene $y = 1$ e $y = 5$, respectivamente.

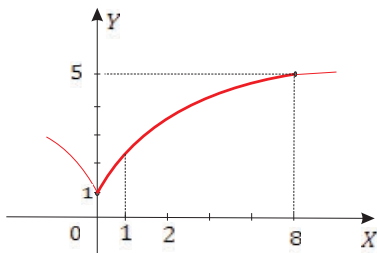


Figura 4.43:

Reemplazando en la fórmula (4.8), tenemos:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_1^5 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}(y-1)^{1/2}\right]^2} dy \\
 &= \int_1^5 \sqrt{\frac{9y}{4} - \frac{5}{4}} dy = \frac{1}{4} \int_1^5 \sqrt{9y-5} dy \\
 &= \frac{1}{27} \left[(9y-5)^{3/2} \right]_1^5 \\
 &= \frac{1}{27} \left(40^{3/2} - 4^{3/2} \right).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.36 Determine la longitud del arco de la curva

$$9x^2 - y^3 + 6y^2 - 9y = 0$$

desde el punto $A = (0, 0)$ hasta el punto $B = (6, 9)$.

Solución.

Despejando la variable x en términos de y , escribimos $x = \frac{1}{3}y^{1/2}(y-3)$; y cuya derivada respecto a y es $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)$. Al sustituir en la fórmula

(4.8), tenemos:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^9 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]^2} dy \\
 &= \int_0^9 \sqrt{\frac{1}{4y} (y+1)^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{y}} (y+1) dy \\
 &= \left[\frac{1}{3} y^{3/2} + y^{1/2} \right]_0^9 \\
 &= 12.
 \end{aligned}$$

4.4.2. Longitud del arco cuando la curva es dada por ecuaciones paramétricas

Teorema 4.11 *Si una curva es definida mediante las ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

donde $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son funciones continuas en un intervalo $[t_1, t_2]$, entonces la longitud del arco de la curva con extremos $P_1 = (x(t_1), y(t_1))$ y $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$, es dada por

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt.$$

Nota: La diferencial de la longitud del arco en función del parámetro t es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt.$$

Prueba.

La prueba es como sigue:

$$\begin{aligned}
 \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2} \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.37 Calcule la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \frac{2}{3}t^{3/2} \end{cases}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

Solución.

Tenemos: $\frac{dx}{dt} = 1$ y $\frac{dy}{dt} = t^{1/2}$. Luego,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt \\ &= \frac{2}{3} \left[(1+t)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.38 Determine la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x(t) &= t + 1 \\ y(t) &= 4 - t^2 \end{cases}$$

comprendida entre los puntos de intersección con los ejes coordenados positivos.

Solución.

Primero determinaremos los límites de integración.

$$x = 0 \text{ implica } t = -1 \wedge y = 3.$$

$$y = 0 \text{ implica } t = \pm 2 \wedge x = 3, \quad x = -1.$$

Desde que los puntos de intersección de la curva es con los ejes coordenados positivos, eligimos $0 \leq x \leq 3$ y por consiguiente $t \in [-1, 2]$.

Así,

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \\ &= \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (2t)^2} dt, \quad \text{haciendo } 2t = \tan \theta \\ &= \frac{1}{4} \left[2t\sqrt{1+4t^2} + \ln \left| \sqrt{1+4t^2} + 2t \right| \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} - 2) + \frac{1}{2} \sqrt{5} + \sqrt{17} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.39 Determine la longitud del arco de la curva:

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \operatorname{sent} \end{cases}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.

Solución.

Tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - t \operatorname{sent}, \quad \frac{dy}{dt} = t \cos t + \operatorname{sent}.$$

Efectuando operaciones correspondientes se obtiene

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 + t^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right) + \pi \sqrt{4\pi^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.40 Determine la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x = e^t \operatorname{sent} \\ y = e^t \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

Solución.

Tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = e^t \operatorname{sent} + e^t \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \operatorname{sent}.$$

Luego,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2e^{2t}.$$

Por tanto,

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^t dt = \sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1).$$

4.4.3. Longitud del arco en coordenadas polares

Teorema 4.12 Si una curva es definida mediante la ecuación en coordenadas polares $r = r(\theta)$, donde $\frac{dr}{d\theta}$ es una función continua, entonces la longitud del arco de la curva cuyos puntos extremos tienen ángulos polares θ_1 y θ_2 , respectivamente, es dada por

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Prueba.

Sea la curva como se muestra en la figura 4.44.

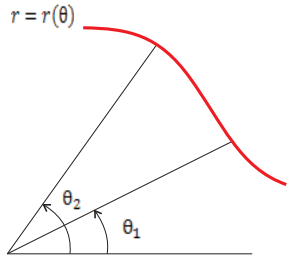


Figura 4.44:

La curva dada también es definida por las ecuaciones paramétricas: $x = r(\theta) \cos \theta$ e $y = r(\theta) \sin \theta$. Lo que implica que

$$\frac{dx}{d\theta} = r' \cos \theta - r \sin \theta \quad \frac{dy}{d\theta} = r' \sin \theta + r \cos \theta$$

y

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (r')^2 + r^2.$$

Por lo tanto,

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Ejemplo 4.41 Calcule el perímetro de la región común a las curvas:

$$r = \cos \theta, \quad r = 1 - \cos \theta.$$

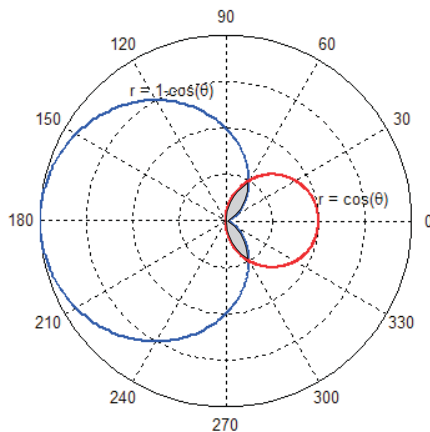


Figura 4.45:

Solución.

Sean $r_1 = \cos \theta$ y $r_2 = 1 - \cos \theta$. El rayo en la cual ocurre la intersección entre las curvas se obtiene de la ecuación $\cos \theta = 1 - \cos \theta$, o sea $\theta = \frac{\pi}{3}$.

En la figura 4.45 observamos que la región es simétrica al eje polar, por lo que el perímetro se puede expresar como: $P = 2(L_2 + L_1)$, donde L_1 y L_2 es longitud del arco de r_1 y r_2 respectivamente.

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)^2} d\theta \right] \\
 &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta \right] \\
 &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] \\
 &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] \\
 &= -8 \left[\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/3} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= 4 + \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.42 Determine el perímetro de la región interior a las curvas:

$$r = \sqrt{3} \operatorname{sen} \theta, \quad r = 1 + \cos \theta.$$

Solución.

En la figura 4.46 se muestra la región y no observamos simetría

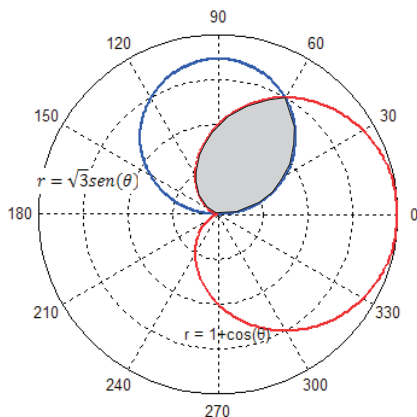


Figura 4.46:

Sea $r_1 = \sqrt{3} \operatorname{sen} \theta$ y $r_2 = 1 + \cos \theta$. El rayo donde se intersectan las curvas se obtiene de la relación $\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta = 1 + \cos \theta$, esto es $\theta = \pi/3$.

Por lo tanto, el perímetro de la región es $P = L_1 + L_2$, donde L_1 y L_2 es la longitud del arco de r_1 y r_2 respectivamente.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{(\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\sqrt{3} \cos \theta)^2} d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{3 \operatorname{sen}^2 \theta + 3 \cos^2 \theta} d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi} 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \sqrt{3} [\theta]_0^{\pi/3} + 4 \left[\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right]_{\pi/3}^{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.43 Calcule el perímetro de la región: interior a $r_1 = 1$ y común a las curvas $r_2 = 2 + 2 \cos \theta$ y $r_3 = 2 \operatorname{sen} \theta$.

Solución.

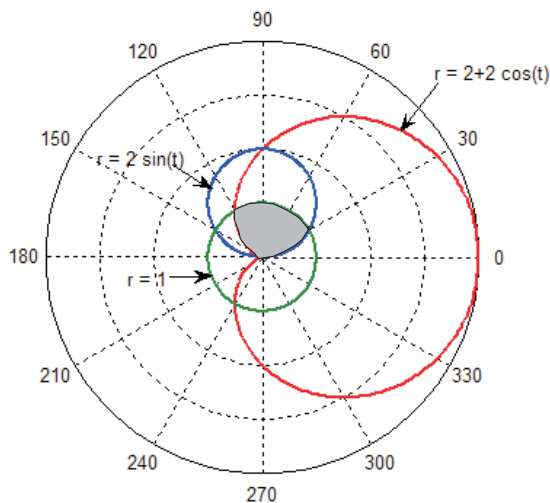


Figura 4.47:

En la figura 4.47 se muestra la región encerrada por las tres curvas.

El rayo en la cual se intersectan las curvas se obtienen de las ecuaciones $r_1 = r_3$ y $r_2 = r_1$. Esto es,

$$\begin{aligned} 2 + 2 \cos \theta &= 1 & , & & 2 \sin \theta &= 1 \\ \theta &= \frac{2\pi}{3} & , & & \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Por otro lado, la tangente en el polo a la cardioide es $\theta = \pi$, lo cual se obtiene al hacer $r = 0$. Así, el perímetro de la región es $P = L_1 + L_2 + L_3$, donde L_1 , L_2 y L_3 es la longitud del arco de r_3 , r_1 y r_2 respectivamente.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{r_3^2 + (r_3')^2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{r_1^2 + (r_1')^2} d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{r_2^2 + (r_2')^2} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta + 2\sqrt{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + (8 - 4\sqrt{3}) \\ &= \frac{5}{6}\pi - 4\sqrt{3} + 8. \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1 – 5, determine la longitud de la curva que se indica.

1. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}, \quad 1 \leq x \leq 3$

2. $y = \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}, \quad 1/3 \leq x \leq 2$

3. $x = \frac{1}{3} (y^2 + 2)^{3/2}, \quad 0 \leq y \leq 4$

4. $x = \frac{1}{3} \sqrt{y} (y - 3)^{3/2}, \quad 1 \leq y \leq 4$

5. $x = \ln y - \frac{y^2}{8}, \quad 1 \leq y \leq 4$

6. Determine la longitud total del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

7. Determine la longitud del lazo de la curva: $x(t) = \frac{3}{8} (t^2 - 1)$, $y(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$, entre los puntos $A(0, -1)$ y $B(0, 1)$.

8. Determine la longitud del lazo de la curva: $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$, $t \in \mathbb{R}$.

9. Determine la longitud de arco de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = \sin t + \sin t \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

10. Determine la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$ entre los puntos $(0, a)$ y (b, c) .

En los ejercicios 11 – 15 determine el perímetro de la región encerrada por las curvas:

11. interior a $r = 1$ y exterior a $r = 1 - \cos \theta$.

12. común a las curvas $r = \sqrt{8}$ y $r^2 = 16 \cos 2\theta$.

13. exterior a $r = 2 \cos \theta$ e interior a $r = 2 + 2 \cos \theta$, comprendida entre la recta $\theta = \frac{\pi}{3}$ y el eje $\frac{\pi}{2}$.

14. exterior a $r = -2 \sin \theta$ e interior a $r = 2 - 2 \sin \theta$, comprendida entre el eje polar y la recta $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

15. interior a $r = 1$ y común a las curvas $r = 2 + 2 \cos \theta$ y $r = 2 \sin \theta$.

4.5. Área de una superficie de revolución

En esta sección la integral definida es usado para hallar el área de una superficie de revolución.

Definición 4.3 (Superficie de revolución) Si la gráfica de una función es rotado alrededor de una recta, la superficie resultante es una **superficie de revolución**.

Definición 4.4 (Área de una superficie de revolución) Si $y = f(x)$ tiene derivada continua en el intervalo $[a, b]$, el área de la superficie de revolución S generada por rotación alrededor del eje X , del arco de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, es definida por

$$A = 2\pi \int_a^b y ds,$$

donde $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ es la diferencial de longitud de arco.

En forma análoga, si $x = g(y)$ tiene derivada continua en $[c, d]$, el área de la superficie de revolución S generada por rotación alrededor del eje Y , del arco de la curva $x = g(y)$ en el intervalo $[c, d]$, es definida por la fórmula

$$A = 2\pi \int_c^d x ds,$$

donde $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ es la diferencial de longitud de arco.

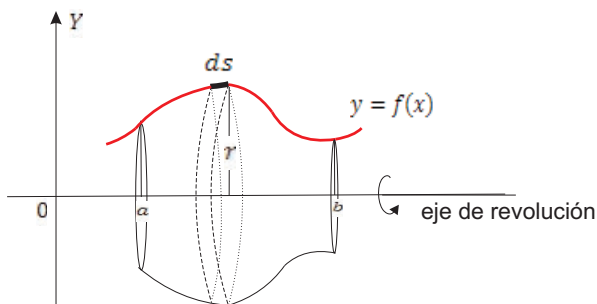


Figura 4.48:

Interpretación.

Obsérvese que cuando un elemento de arco, de longitud ds , rota alrededor del eje X por ejemplo, engendra un cilindro circular recto de altura $h = ds$, radio $r = y$, y superficie lateral $dA = 2\pi y ds$.

Ejemplo 4.44 Calcule el área de la superficie de revolución generada al hacer rotar alrededor del eje X , el arco de la curva $y = \sqrt{x-1}$ desde $x = 1$ hasta $x = 5$.

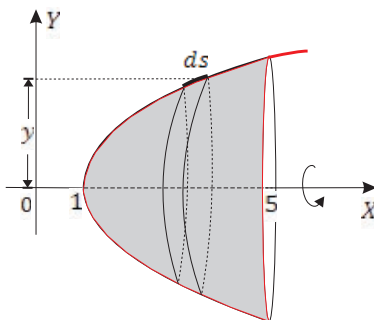
Solución.

Figura 4.49:

En la figura 4.49 se muestra que la distancia entre el eje X y un elemento del arco, es $r = y$. Al rotar alrededor del eje X , genera un cilindro circular recto cuya diferencial de área es

$$dA = 2\pi y ds.$$

Primera forma es considerar $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, donde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Entonces el área de la superficie de revolución cuando x varía desde $x = 1$ hasta $x = 5$, es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^5 r \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi \int_1^5 \sqrt{x-1} \sqrt{1 + \frac{1}{4x-4}} dx = \pi \int_1^5 \sqrt{4x-3} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^5 (4x-3)^{1/2} d(4x+1) = \frac{\pi}{6} \left[(4x-3)^{3/2} \right]_1^5 \\ &= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1) u^2. \end{aligned}$$

Segunda forma es considerar $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$. En este caso, cuando y varía desde $y = 0$ hasta $y = 2$, el área de la superficie es

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi \int_0^2 r \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2} dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 y \sqrt{1 + 4y^2} dy = 4\pi \int_0^2 \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}} d\left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \\
 &= 4\pi \int_0^2 \left(y^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} d\left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \\
 &= \frac{8\pi}{3} \left[\left(y^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2} \right]_1^5 \\
 &= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1) u^2.
 \end{aligned}$$

Obsévese que hemos obtenido el mismo resultado. Esto es por que la función longitud de arco es invariante.

En lo sucesivo, por cuestiones de comodidad, omiteremos de colocar las unidades de área.

Ejemplo 4.45 Determine el área de la superficie generada por rotación alrededor de la recta $x = 1$, el arco de la parábola $y = x^2 - 2x$, para x en el intervalo $[1, 2]$.

Solución.

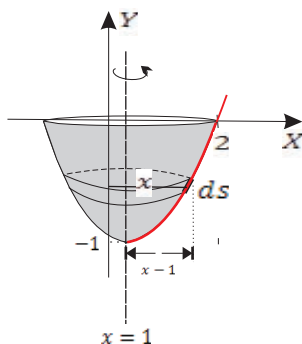


Figura 4.50:

En la figura 4.50 se muestra un elemento del arco, así como el radio $r = x - 1$.

Al rotar alrededor de la recta $x = 1$ se obtiene diferencial del área $dA = 2\pi r ds$.

Sea $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$. Entonces cuando y varía desde $y = -1$ hasta $y = 0$, el área de la superficie generada es:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-1}^0 (x-1) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_{-1}^0 (x-1) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y+1}}\right)^2} dy \\ &= 2\pi \int_{-1}^0 \sqrt{y+1} \sqrt{\frac{4(y+1)+1}{4(y+1)}} dy \\ &= \pi \int_{-1}^0 \sqrt{4y+5} dy \\ &= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.46 Determine el área de la superficie de revolución al rotar alrededor de la recta $x = 1$, el arco de la curva $x = 1 + \sqrt{4y - y^2}$.

Solución.

En la figura 4.51 se muestra el arco de la curva, a la derecha de la recta $x = 1$.

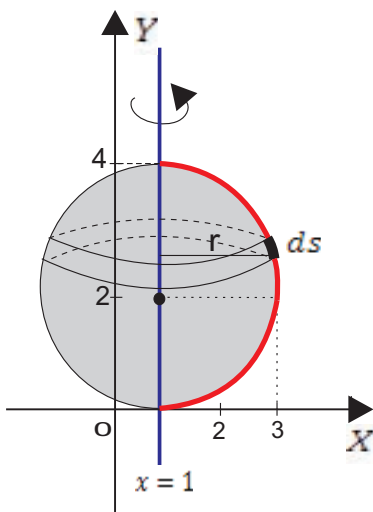


Figura 4.51:

En ella tomamos un elemento del arco, que al rotar alrededor de la recta $x = 1$ genera una superficie con diferencial de área $dA = 2\pi r ds$, donde $r = x - 1$.

Sea $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$, donde $\frac{dx}{dy} = \frac{2-y}{\sqrt{4y-y^2}}$. Entonces cuando y varía desde $y = 0$ hasta $y = 4$, el área de la superficie generada es:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 (x-1) ds \\ &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{4y-y^2} \sqrt{1 + \frac{(2-y)^2}{4y-y^2}} dy \\ &= 2\pi \int_0^4 2dy \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.47 Calcule el área de la superficie generada al rotar alrededor de la recta $x = 4$, la gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, para x en el intervalo $[1, 3]$.

Solución.

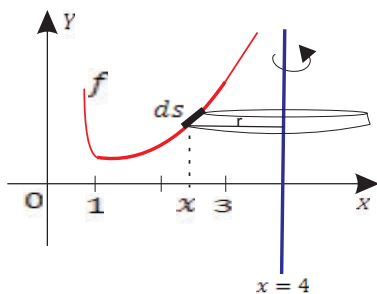


Figura 4.52:

En la figura 4.52 se muestra $r = 4 - x$. Al rotar un elemento de arco de $y = f(x)$ alrededor de la recta $x = 4$ se obtiene la diferencial del área de la superficie

$$dA = 2\pi (4 - x) ds.$$

Con $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ y $\frac{dy}{dx} = \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)$, cuando x varía desde $x = 1$ hasta $x = 3$, el área de la superficie generada es:

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi \int_1^3 (4-x) \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\
 &= 2\pi \int_1^3 (4-x) \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx \\
 &= 2\pi \int_1^3 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x} + 4x^2 - x^3\right) dx \\
 &= 2\pi \left[\frac{-2}{x} - \frac{1}{2} \ln x + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_1^3 \\
 &= -2\pi \left(\frac{1}{2} \ln 3 - 16 \right).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.48 Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje Y , el arco de la curva $x = \sqrt{y} - \frac{\sqrt{y^3}}{3}$, $y \in [1, 3]$.

Solución.

Con $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\sqrt{y}$ cuando y varía desde $y = 1$ hasta $y = 3$, el área de la superficie generada es:

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi \int_1^3 x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\
 &= 2\pi \int_1^3 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\sqrt{y^3}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2} dy \\
 &= 2\pi \int_1^3 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\sqrt{y^3}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2} dy \\
 &= 2\pi \int_1^3 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\sqrt{y^3}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{2}\right) dy \\
 &= \frac{16\pi}{9}.
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1–3, determine el área de la superficie generada por rotación de la curva $y = f(x)$ alrededor del eje X .

1. $y = \frac{1}{3}x^3, \quad 0 \leq x \leq 3.$

2. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \leq x \leq 3.$

3. $y = e^{-x}, \quad x \geq 0.$

En los ejercicios 4–7, determine el área de la superficie generada por rotación de la curva $y = f(x)$ alrededor del eje Y .

4. $y = \sqrt{x - 1}, \quad 1 \leq x \leq 5.$

5. $y = 2 + \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leq x \leq 8.$

6. $y = 1 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$

7. $y = 9x - x^3, \quad -\sqrt{3} \leq x \leq 0.$

En los ejercicios 8–10, determine el área de la superficie generada por rotación de la curva $y = f(x)$.

8. $y = -3x, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad \text{alrededor de la recta } y = -3.$

9. $y = 4 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad \text{alrededor de la recta } x = -2.$

10. $y = \sqrt{4 - x^2} + 2, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad \text{alrededor de la recta } y = 5.$

En los ejercicios 11–13, determine el área de la superficie generada por rotación de la curva $x = f(y)$.

11. $x = \left(\frac{3}{2}y\right)^{2/3}, \quad 0 \leq y \leq 2/3, \quad \text{alrededor de la recta } x = 2.$

12. $x = \frac{1}{3}y^3, \quad 0 \leq y \leq 3, \quad \text{alrededor de la recta } x = 4.$

13. $x = \frac{1}{4}(y^2 - \ln y^2), \quad 1 \leq y \leq 4, \quad \text{alrededor del eje } X.$

14. Determine el área de la superficie obtenida al girar alrededor del eje X , el lazo de la curva

$$9y^2 = x(3 - x)^2$$

15. Determine el área de la superficie obtenida al rotar la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

alrededor del eje Y .

16. Determine el área de la superficie obtenida al rotar la curva

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

alrededor de la recta $x = -1$.

17. Determine el área de la superficie generada al rotar la curva

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad 1 \leq x \leq 4$$

alrededor de la recta $y = -1$.

18. Determine el área de la superficie obtenida al hacer rotar la curva $y = e^{-x}$, $x \geq 0$ alrededor del eje X .

19. Determine el área de la superficie genrada al hacer girar la curva

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

alrededor de la recta $y = 3$.

20. Se diseña un foco de luz haciendo girar la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1/3$, en torno al eje X . Determine el área de la superficie de la lámina de vidrio que será necesario para fabricar dicho foco.

4.6. Aplicaciones físicas

4.6.1. Trabajo

El concepto de trabajo es fundamental en la física y se aplica en una amplia gama de situaciones, desde problemas mecánicos simples hasta cálculos complejos en dinámica, termodinámica, electromagnetismo y muchas otras ramas de la física. Ayuda a comprender cómo se transfiere y transforma la energía en sistemas físicos.

Trabajo realizado por una fuerza constante

Definición 4.5 *Si un objeto se traslada una distancia, d , a lo largo de una línea recta, mientras se encuentra sujeto a una fuerza constante F en la dirección del movimiento, entonces **la cantidad de trabajo W realizado por la fuerza** es definido como*

$$W = F \cdot d$$

La cantidad W es una medida de la cantidad de energía requerida para llevar a cabo un proceso. Si la fuerza se mide en **newtons (N)** (la fuerza que se requiere para darle a una masa de 1 kilogramo una aceleración de 1 metro por segundo al cuadrado), entonces el trabajo está en **newton x metro**, también llamada **joules (J)**

Trabajo realizado por una fuerza variable

En muchas situaciones prácticas, la fuerza no es constante, sino que varía conforme el objeto cambia de posición. Así por ejemplo, la fuerza requerida para comprimir o estirar un resorte aumenta a medida que el resorte se comprime o se estira.

Supóngase que un objeto es trasladado a lo largo del eje X desde $x = a$ hasta $x = b$ por una fuerza $F(x)$ que varía continuamente. Sea P una partición que divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos determinado por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para cada i , y sea ξ_i tal que $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Entonces en ξ_i la fuerza es dado por $F(\xi_i)$; y como F es continuo, podemos aproximar el trabajo realizado en trasladar el objeto a través del i -ésimo intervalo por el incremento

$$\Delta W_i = F(\xi_i) \Delta x_i.$$

Luego el trabajo, W , total realizado cuando el objeto es trasladado desde a hasta b es aproximado por la suma

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^n \Delta W_i \\ &= \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Esta aproximación se puede mejorar cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Así, el trabajo realizado es

$$W = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx.$$

Definición 4.6 (Trabajo realizado por una fuerza variable) *Si un objeto es trasladado a lo largo de una línea recta por una fuerza $F(x)$ que varía continuamente, entonces el trabajo realizado por la fuerza cuando el objeto es trasladado desde $x = a$ hasta $x = b$ es*

$$W = \int_a^b F(x) dx. \quad (4.9)$$

Los ejemplos que abordaremos en esta sección utiliza la siguiente ley física desarrollado por Robert Hooke (1635-1703).

La Ley de Hooke

La ley de Hooke dice que la fuerza requerida para mantener estirado o contraído un resorte de su longitud en estado de equilibrio es proporcional a la distancia que se estire o contraiga de su longitud natural.

Si un resorte se extiende naturalmente sobre su eje y se hace coincidir uno de sus extremos con el origen del sistema, entonces la fuerza que se requiere para estirar este extremo a una posición x es $F(x) = kx$, donde k es la constante del resorte.

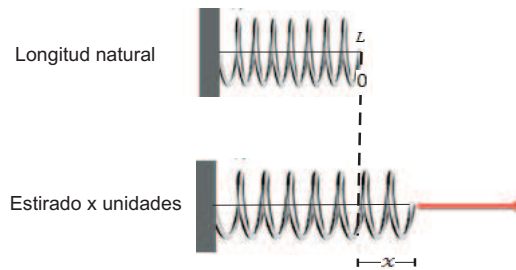


Figura 4.53:

Ejemplo 4.49 Considere un resorte de 15 cm de longitud. Se requieren 5N para mantenerlo estirado hasta 17 cm. Calcule el trabajo de estirarlo de 17 cm a 20 cm.

Solución.

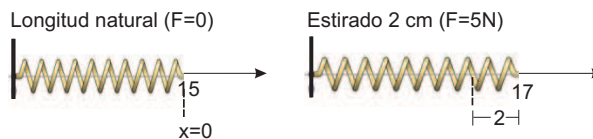


Figura 4.54:

De acuerdo con la ley de Hooke, $F(x) = kx$. Entonces, la constante del resorte se obtiene de resolver $5N = k(0.02m)$, o sea $k = 250N/m$. Por tanto, $F(x) = 250x$

Para calcular el trabajo que se pide, hacemos uso de la fórmula (4.9), esto es

$$\begin{aligned} W &= \int_{0.02}^{0.05} 250x dx = 125 [x^2]_{0.02}^{0.05} \\ &= 125 [(0.05)^2 - (0.02)^2] \\ &= 0.2625J. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.50 La longitud natural de un resorte es de 20 cm. Si para mantenerlo comprimido 3 cm se necesita una fuerza de 60 N, entonces ¿cuál será el trabajo necesario para comprimir dicho resorte desde 3 cm hasta 5 cm?

Solución.

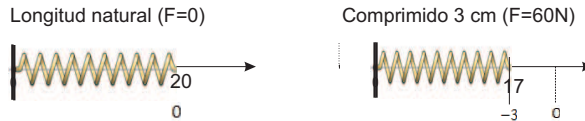


Figura 4.55:

De $F(x) = kx$ se sigue que $60 = k\left(\frac{3}{100}\right)$, o sea $k = 200 \text{ N/m}$. Así, $F(x) = 2000x$ y el trabajo requerido se determina al integrar la fuerza, esto es,

$$\begin{aligned} W &= 2000 \int_{0.03}^{0.05} x dx = 100 [x^2]_{0.03}^{0.05} \\ &= 100 \left[(0.05)^2 - (0.03)^2 \right] \\ &= 1.6 J. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.51 Un resorte cuya longitud natural es L cm se estira hasta alcanzar una longitud de 15 cm, y para mantenerlo estirado en esa longitud se requiere una fuerza de 20 N. Si se requiere un trabajo de 3 J para estirarlo de 15 cm a 20 cm, determine la longitud natural de dicho resorte.

Solución.

De acuerdo con la ley de Hooke, $F(x) = kx$. Como se requieren 20 N para estirar $\frac{(15-L)}{100}$ m, entonces de la ecuación $20 = k \frac{(15-L)}{100}$ se obtiene $k = \frac{200}{15-L} \text{ N/m}$ y por tanto $F(x) = \left(\frac{2000}{15-L} \right) x$. Luego, usando la fórmula (4.9) con $W = 3$ y para x que varía desde $x = \frac{15-L}{100}$ m hasta $x = \frac{20-L}{100}$ m, tenemos:

$$\begin{aligned} 3 &= \left(\frac{2000}{15-L} \right) \int_{\frac{15-L}{100}}^{\frac{20-L}{100}} x dx \\ 3 &= \left(\frac{1000}{15-L} \right) \left(\frac{7}{400} - \frac{1}{1000} L \right). \end{aligned}$$

Al resolver para L se obtiene la longitud natural del resorte, esto es, $L = 13.75$ cm.

Ejemplo 4.52 *La longitud natural de un resorte es de 20 cm. Si para estirarlo de 22 cm hasta 26 cm se requiere un trabajo de 12 J, entonces ¿cuál será el trabajo que se requiere para comprimirlo dicho resorte de 20 cm hasta 18 cm ?*

Solución.

Tenemos

$$\begin{aligned} 12 &= \int_{0,02}^{0,06} kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0,02}^{0,06} = \frac{k}{2} \left[(0,06)^2 - (0,02)^2 \right] \\ 12 &= \frac{k}{2} (0.0032), \end{aligned}$$

de donde, el valor de la constante es $k = 7500 \text{ N/m}$. Así que $F(x) = 7500x$ y el trabajo requerido se determina al integrar la fuerza, esto es

$$\begin{aligned} W &= 7500 \int_0^{0,02} x dx \\ &= 7500 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,02} \\ &= 1.5J. \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si una fuerza de 900 N comprime un resorte medio centímetro, halle la constante del resorte. Si se aplica una fuerza de 600 N, ¿cuántos centímetros se comprime el resorte?.
2. El trabajo realizado al comprimir un resorte $1/8$ de su longitud en estado natural es 7.8125 J . Si la constante del resorte es 10^5 N/m , halle la longitud natural del resorte.
3. Se necesitan 15 J de trabajo para estirar un resorte de 33 cm a 34 cm y 25 J para estirarlo de 34 cm a 35 cm. ¿Cuál es la longitud en estado natural del resorte?
4. Un resorte tiene una longitud natural de 8 cm. Si una fuerza de 20 N mantiene estirado el resorte $1/2 \text{ cm}$, determine el trabajo realizado al estirar el resorte de 8 cm a 11 cm.
5. Una fuerza de 25 N mantiene estirado un resorte en 3 cm. Determine el trabajo requerido para alargar el resorte 2 cm más.

6. Se requiere una fuerza de 0.6 N para mantener un resorte de longitud natural de 0.08 m , comprimido a una longitud de 0.07 metros. Encuentre el trabajo realizado para comprimir el resorte de su longitud natural a la longitud de 0.06 m .
7. Un resorte tiene una longitud natural de 10 cm , y una fuerza de 30 newtons lo mantiene estirado $11,5 \text{ cm}$. Determine el trabajo realizado al estirar el resorte de 10 cm a 12 cm ; luego encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte de 12 cm a 14 cm .
8. Se requiere 0.05 J de trabajo para estirar un resorte desde una longitud de 8 cm a 9 cm , y otros 0.10 J para estirarlo de 9 cm a 10 cm . Determine la constante de deformación del resorte y encuentre la longitud natural del resorte.
9. Un resorte tiene una longitud natural de 6 cm . Si una fuerza de 1200 N lo mantiene comprimido en 0.5 cm , determine el trabajo efectuado al comprimirlo desde 0.6 cm hasta 4.5 cm . ¿Qué trabajo se requiere para hacer que el resorte llegue a 9 cm partiendo de su estado comprimido de 4.5 cm ?
10. Un resorte tiene una longitud natural de 25 cm . Si se requiere una fuerza de 350 N para mantenerlo estirado 5 cm , ¿cuál es el trabajo realizado al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 32 cm ?

4.6.2. Centro de Masa

En esta sección estudiaremos diversas aplicaciones importantes de integración que son relacionados a la masa.

Masa

Masa es una medida de la resistencia de un cuerpo a los cambios en el movimiento, y es independiente del sistema gravitacional en la que se encuentra el cuerpo. Sin embargo, debido a que muchas aplicaciones que involucran masa ocurre en la superficie de la Tierra, masa de un objeto es igualado con su peso. Peso es un tipo de fuerza y como tal es dependiente de la gravedad. Fuerza y masa son relacionados por la ecuación

$$F = (\text{masa})(\text{aceleración})$$

Sistema de medida	masa	aceleración	Fuerza
Sistema internacional	kg	m/s^2	$newton \text{ (N)} = (kg)(m/s^2)$

Centro de masa en un sistema unidimensional

El producto de la masa de una partícula por su distancia dirigida desde un punto (su brazo de palanca) se denomina **momento** de la partícula con respecto a ese punto (véase la Figura 3). La condición para que dos masas a lo largo de esta recta estén en equilibrio es que la suma de sus momentos con respecto al punto sea cero.

El momento total M (con respecto al origen) de un sistema de n masas $m_1, m_2, \dots, m_n$ ubicados en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ a lo largo del eje X es la suma de los momentos individuales, esto es,

$$M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

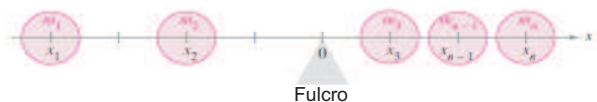


Figura 4.56:

La condición para equilibrio en el origen es que $M = 0$. Por su puesto, no debemos esperar equilibrio en el origen, excepto en circunstancias especiales. Pero seguramente un sistema de masas se equilibrará en alguna parte. La pregunta es dónde. ¿Cuál es la abscisa del punto en donde el fulcro debe colocarse para que el sistema en la Figura 56 esté en equilibrio?.

Sea $\bar{x}$ la coordenada deseada. Entonces el momento total con respecto a él debe ser cero; es decir,

$$(x_1 - \bar{x}) m_1 + (x_2 - \bar{x}) m_2 + \dots + (x_n - \bar{x}) m_n = 0$$

o

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = \bar{x} m_1 + \bar{x} m_2 + \dots + \bar{x} m_n$$

Al despejar a $\bar{x}$ obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

El punto $\bar{x}$ denominado **centro de masa**, es el punto de equilibrio.

Centro de masa en un sistema bidimensional

Considérese n masas puntuales $m_1, m_2, \dots, m_n$, situadas en los puntos (x_i, y_i) con $i = 1, \dots, n$ en el plano coordenado. Entonces los momentos totales M_y y M_x con respecto al eje Y y al eje X , respectivamente, están dadas por:

$$M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i$$

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa (punto de equilibrio) son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Centro de masa de una lámina plana

Hasta ahora hemos considerado la masa total de un sistema que se distribuye en puntos discretos en un plano o en una línea. Ahora consideraremos una lámina plana que es homogénea, es decir, la densidad ρ (masa por unidad de área) es constante.

Teorema 4.13 Sean f y g funciones continuas tales que $g(x) \leq f(x)$ en $[a, b]$, y considere la lámina plana R de densidad uniforme, ρ , limitada por las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$. Entonces

1. Los momentos con respecto a los ejes X e Y son:

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx,$$

$$M_y = \rho \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

2. El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es dado por $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$, donde m es la masa de la lámina definida por

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

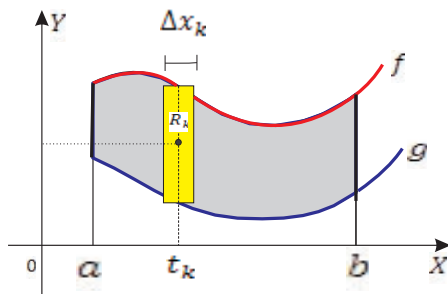


Figura 4.57:

Prueba.

Consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo del intervalo $[a, b]$ y elijamos t_k en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como el punto medio, esto es, $t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$. (Véase figura 4.57).

El centro de masa del k -ésimo rectángulo R_k está en su centro $(t_k, \frac{1}{2} [f(t_k) + g(t_k)])$ (lo idealizamos con una varilla delgada y consideramos que la densidad no varía demasiado en cada punto de R_k). Su área es $f(t_k) \Delta x_k$ y por lo tanto su masa, m , es $m = \rho(t_k) [f(t_k) - g(t_k)] \Delta x_k$.

Ahora, el momento de R_k respecto del eje X es igual al producto de su masa por su distancia de su centro de masa al eje X (nótese que esta distancia es igual a $\frac{1}{2} [f(t_k) + g(t_k)]$); es decir

$$M_x(R_k) = \frac{1}{2} \rho(t_k) [f^2(t_k) - g^2(t_k)] \Delta x_k.$$

Sumando sobre k en la expresión anterior, obtenemos el momento respecto al eje X de una aproximación de la región R . Conforme la norma de la partición tiende a cero, obtenemos que el momento de R respecto al eje X es

$$M_x = \int_a^b \frac{1}{2} \rho(x) [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

Análogamente, el momento de R_k respecto del eje Y es igual al producto de su masa por la distancia de su centro de masa al eje Y (nótese que esta distancia es t_k), es decir:

$$M_y(R_k) = \rho(t_k) t_k [f(t_k) - g(t_k)] \Delta x_k.$$

Sumando sobre k en esta última expresión, obtenemos el momento respecto al eje Y de una aproximación de la región R . Conforme la norma de la partición

tiende a cero, obtenemos que el momento de R respecto al eje Y es

$$M_y = \int_a^b \rho(t_k) x [f(x) - g(x)] dx.$$

De manera análoga que para sistemas de partículas, las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$, se expresan en términos de los momentos:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \rho(t_k) x [f(x) - g(x)] dx}{\int_a^b \rho(t_k) [f(x) - g(x)] dx}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} \rho(t_k) [f^2(x) - g^2(x)] dx}{\int_a^b \rho(t_k) [f(x) - g(x)] dx}$$

donde $m = \int_a^b \rho(t_k) [f(x) - g(x)] dx$ representa la masa de la lámina.

Teorema 4.14 Sean f y g funciones continuas tales que $g(y) \leq f(y)$ en $[c, d]$, y considere la lámina plana R de densidad uniforme, ρ , limitada por las gráficas de $x = f(y)$, $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$. Entonces

1. los momentos con respecto a los ejes X e Y son:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_c^d y [f(y) - g(y)] dy, \\ M_y &= \frac{\rho}{2} \int_c^d [f^2(y) - g^2(y)] dy. \end{aligned}$$

2. el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es dado por $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$, donde m es la masa de la lámina definida por

$$m = \rho \int_c^d [f(y) - g(y)] dy.$$

Observación: Si la región R es simétrica respecto a la recta $x = x_0$, entonces el centroide es $(x_0, \bar{y})$; y si la región R es simétrica respecto a la recta $y = y_0$ entonces el centroide es $(\bar{x}, y_0)$.

Ejemplo 4.53 Halle el centroide de la región limitada por las curvas

$$y = 2x - x^2, \quad y = 4 - x^2 \quad \text{y} \quad \text{la recta} \quad x = -3.$$

Solución.

La región se muestra en la figura 4.58.

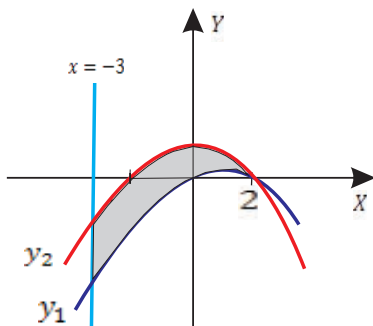


Figura 4.58:

La masa y los momentos son calculados de la siguiente manera.

$$m = \rho \int_{-3}^2 (y_2 - y_1) dx = \int_{-3}^2 (4 - x^2 - 2x + x^2) dx = 25\rho,$$

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_{-3}^2 [(4 - x^2)^2 - (2x - x^2)^2] dx = -\frac{125\rho}{2}$$

y

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_{-3}^2 x (4 - x^2 - 2x + x^2) dx \\ &= -\frac{100\rho}{3}. \end{aligned}$$

Luego, $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = -4/3$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = -5/2$; y por tanto el centroide de la región es $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{2}\right)$.

Nótese que la densidad ρ en el ejemplo es un factor común tanto en los momentos como en la masa; por lo que al efectuar la división se simplifica. Así que, el centro de masa de una lámina de densidad uniforme depende únicamente de la forma de la lámina y no de su densidad. Por esta razón, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ es llamado centro de masa de una región en el plano, o **centroide** de la región.

En los ejemplos siguientes asumiremos $\rho = 1$ y por consiguiente $m = A$.

Ejemplo 4.54 Determine el centroide de la región limitada por las gráficas de

$$x = y^2 \quad y \quad x = 2y + 3.$$

Solución.

En la figura 4.59 se muestra la región.

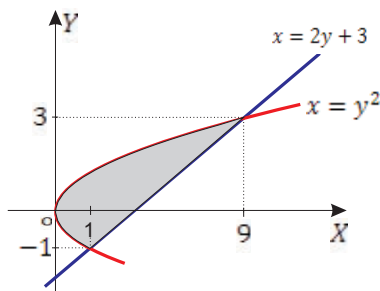


Figura 4.59:

Es inmediato ver que la intersección entre las curvas son los puntos $(-1, 1)$ y $(9, 3)$. Para calcular la masa y los momentos es conveniente formular las integrales con respecto a la variable y , esto es:

$$A = \int_{-1}^3 (2y + 3 - y^2) dy = \frac{32}{3}.$$

$$M_x = \int_{-1}^3 y (2y + 3 - y^2) dy = \frac{32}{3}.$$

$$M_y = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 [(2y + 3)^2 - (y^2)^2] dy = \frac{544}{15}.$$

Así, $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = 17/5$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = 1$; y por lo tanto, $\left(\frac{17}{5}, 1\right)$ es el centroide de la región.

Ejemplo 4.55 Halle el centroide de la región limitada por las curvas

$$y = 2x - x^2, \quad y = 3x^2 - 6$$

Solución.

En la figura 4.60, se observa que la región es simétrica con respecto a la recta $x = 1$, por lo que el centroide de la región es $(1, \bar{y})$, donde $\bar{y} = \frac{M_x}{A}$.

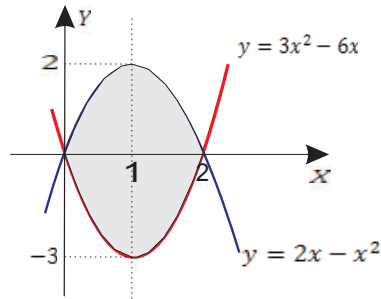


Figura 4.60:

La intersección entre las curvas ocurre cuando $x = 0$ y $x = 2$.

El área y el momento son calculados como sigue:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 ((2x - x^2) - (3x^2 - 6x)) \, dx \\
 &= \int_0^2 (8x - 4x^2) \, dx \\
 &= \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{1}{2} \int_0^2 ((2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (-8x^4 - 40x^3 - 32x^2) \, dx \\
 &= -\frac{16}{15}.
 \end{aligned}$$

Así, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = -\frac{4}{5}$ y por tanto el centroide de la región es $\left(1, -\frac{4}{5}\right)$.

Ejemplo 4.56 Halle el centroide de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$ y la recta $y = 2 - x$.

Solución.

En la figura 4.61 se muestra la región limitada por las tres curvas.

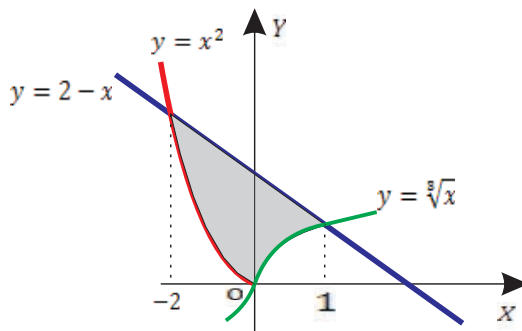


Figura 4.61:

El área de la región sombreada es

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^0 (2 - x - x^2) dx + \int_0^1 (2 - x - x^{1/3}) dx \\
 &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 + \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^{4/3}}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{10}{3} + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{49}{12}.
 \end{aligned}$$

Los momentos son calculados como sigue:

$$\begin{aligned}
 Mx &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 [(2 - x)^2 - x^4] dx + \frac{1}{2} \int_0^1 ((2 - x)^2 - x^{2/3}) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{-2}^0 + \frac{1}{2} \left[4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^{5/3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{92}{15} + \frac{13}{15} \\
 &= 7.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_{-2}^0 x [(2-x) - x^2] dx + \int_0^1 x [(2-x) - x^{1/3}] dx \\
&= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^0 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^{7/3}}{7} \right]_0^1 \\
&= -\frac{8}{3} + \frac{5}{21} \\
&= -\frac{17}{7}.
\end{aligned}$$

Luego, el centroide de la región es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = -\frac{204}{343} \approx -0.6, \quad \bar{y} = \frac{12}{7} \approx 1.7.$$

Teorema 4.15 (de Pappus) Sean R_1 y R_2 dos regiones disjuntas del plano xy con masas m_1 y m_2 y centroides $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ y $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, respectivamente. Entonces el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región $R = R_1 \cup R_2$ es dada por

$$\bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \bar{y} = \frac{m_1 \bar{y}_1 + m_2 \bar{y}_2}{m_1 + m_2}.$$

Ejemplo 4.57 Usando el teorema de Pappus, determine el centroide de la región indicada en el ejemplo 4.56

Solución.

Consideremos las regiones R_1 y R_2 con $x \in [-2, 0]$ y $x \in [0, 1]$ como se muestra en la figura 4.61. Entonces, tenemos los siguientes:

Para la región R_1 :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^0 (2 - x - x^2) dx = \frac{10}{3}. \\
Mx &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 [(2-x)^2 - x^4] dx = \frac{92}{15}. \\
M_y &= \int_{-2}^0 x [(2-x) - x^2] dx = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Luego, el centroide $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ de la región R_1 es $\left(-\frac{4}{5}, \frac{46}{25} \right)$.

Para la región R_2 :

$$A_2 = \int_0^1 (2 - x - x^{1/3}) dx = \frac{3}{4}.$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 ((2 - x)^2 - x^{2/3}) dx = \frac{13}{15}.$$

$$M_y = \int_0^1 x [(2 - x) - x^{1/3}] dx = \frac{5}{21}.$$

Luego, el centroide $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ de la región R_2 es $\left(\frac{20}{63}, \frac{52}{45}\right)$.

Finalmente, el centroide de la región $R = R_1 \cup R_2$ es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{10}{3} \left(\frac{-4}{5}\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{20}{63}\right)}{\frac{10}{3} + \frac{3}{4}} = -\frac{204}{343} \approx -0.6.$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 \bar{y}_1 + m_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{10}{3} \left(\frac{46}{25}\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{52}{45}\right)}{\frac{10}{3} + \frac{3}{4}} = \frac{12}{7} \approx 1.7.$$

Nótese que hemos encontrado las mismas coordenadas del centroide.

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1 – 15, halle el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región limitada por las curvas dadas.

1. $x = -y, \quad x = 2y - y^2$
2. $y = x^3, \quad y = x^2$
3. $y = -x^2 + 4x + 2, \quad y = x + 2$
4. $x = 4 - y^2, \quad x = 0$
5. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0 \quad y = 4$
6. $x = 4y - y^2 \quad x = 0$
7. $y = x^2, \quad y = 2x + 3$
8. $y^2 - 4x = 0, \quad 2x - y - 4 = 0$

$$9. \quad y^2 - 2x^3 = 0, \quad y^2 + 8x - 32 = 0$$

$$10. \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$$

$$11. \quad y = 2 + 4x - x^2, \quad y = 2|x - 1|$$

$$12. \quad y = 2 - \frac{1}{x+1}, \quad y = \frac{3}{x+1}, \quad x = 0$$

$$13. \quad y^2 - 4y - 2x + 4 = 0, \quad x - 2y + 4 = 0, \quad y = 0$$

$$14. \quad y = x^2 - 4, \quad x = 1 - \sqrt{1-y}, \quad x = 0$$

$$15. \quad y = 1 - \sqrt{x+1}, \quad y = x - 4, \quad y = 1$$

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

El estudio de las ecuaciones diferenciales es una parte de la Matemática que, quizá más que cualquier otra, ha sido directamente inspirada por la Mecánica, la Astronomía y la Física matemática. Su historia empezó en el siglo XVII cuando Newton, Leibniz y los Bernoulli resolvieron algunas ecuaciones diferenciales sencillas que se presentaron en problemas de Geometría y Mecánica. Esos primeros descubrimientos, que comenzaron alrededor de 1690, ahora sirven para hacer modelos apropiados para muchos experimentos de la vida y fenómenos de la naturaleza en áreas como biología, química, física, ingeniería, medicina, etc.

Muchas de las leyes básicas de las disciplinas mencionadas arriba son definidas en términos matemáticos que contienen una función no conocida y sus derivadas. Aquí presentaremos algunas técnicas para encontrar soluciones de algunas ecuaciones diferenciales, tales soluciones son llamadas soluciones analíticas; sin embargo no siempre se puede obtener la solución de una ecuación diferencial por métodos analíticos, en este caso se recurre a procedimientos numéricos y que no serán abordados en esta obra.

5.1. Definiciones y terminologías

Definición 5.1 *Una ecuación que contiene la derivada de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se llama **ecuación diferencial**.*

Clasificación según el tipo

- Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Si una ecuación sólo contiene las derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**.

Así por jemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

es una ecuación diferencial ordinaria. Aquí, $y = y(x)$ es una función desconocida y x es la variable independiente.

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinaria son:

$$\begin{aligned} y' &= y^2 - x & xy' &= y \\ y' + 5y &= e^{-5t} & y' &= \cos(xy) \\ yy'' + x^2y &= \operatorname{sen} x & y'' &= y^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

- Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variable independientes, se llama **ecuación en derivadas pariales**.

Así por ejemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^{-x} + y$$

son ecuaciones en derivadas parciales.

Clasificación según el orden y grado

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

El grado de una ecuación diferencial es el mayor exponente (número natural) al que está elevada la derivada de mayor orden.

Así por ejemplo

$$x \frac{dy}{dx} + y = -x \text{ o equivalentemente } (x - y) dx + x dy = 0$$

es una EDO de primer orden y primer grado; en cambio

$$\frac{d^3 y}{dx^2} - x \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 5y = 2x^4.$$

es una EDO de tercer orden y primer grado.

Para determinar el grado de una ecuación diferencial es necesario que esté expresada en forma polinomial.

Ejemplo 5.1 Indicar el orden y grado de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5} - 2y = 0$$

Solución.

Reescribiendo

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5} - 2y$$

elevamos al cuadrado y transponiendo, resulta

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 2y = 0.$$

Por tanto, la ecuación diferencial dada es de segundo orden y cuarto grado.

La forma general de una EDO de n -ésimo orden, en **forma implícita**, es

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \quad (5.2)$$

donde F es una función de $n + 1$ variables. Nótese que todas las ecuaciones de (5.1) se pueden escribir en esta forma.

Si en la ecuación (5.2) es posible despejar $y^{(n)}$, entonces se puede escribir en la **forma explícita**

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right); \quad (5.3)$$

y se dice también que está en la **forma normal**.

Clasificación según la linealidad o no linealidad

Una ecuación de la forma $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ se dice que es lineal, cuando f es una función lineal de $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Esto significa que una ecuación lineal puede escribirse en la forma

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x).$$

Note que la variable y y todas sus derivadas son de primer grado y los coeficientes solo dependen de x .

Son ejemplos de ecuaciones lineales:

$$y'' - 3y' + y = 0, \quad x^2 y'' + xy' + y = xe^x.$$

Ecuaciones no lineales son por ejemplo:

$$y' - xy^{1/2} = 0, \quad y'' + \cos y = 0, \quad (1 + y)y'' + y = x^2$$

5.2. Soluciones

Definición 5.2 (Solución explícita) *Cualquier función $\phi(x)$ definida sobre un intervalo I , que posea al menos n derivadas sobre I , las cuales al ser sustituidas para y en la ecuación (5.2) o (5.3) satisface la ecuación para todo x en el intervalo I es llamado **solución explícita** de la ecuación sobre I .*

Ejemplo 5.2 *Muestre que $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ es una solución explícita para la ecuación lineal*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Solución.

Las funciones $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$, $\phi'(x) = 2x + x^{-2}$, $\phi''(x) = 2 - 2x^{-3}$ están definidas para $x \neq 0$. La sustitución de $\phi(x)$ para y en la ecuación diferencial produce

$$(2 - 2x^{-3}) - \frac{2}{x^2}(x^2 - x^{-1}) = (2 - 2x^{-3}) - (2 - 2x^{-3}) = 0.$$

Puesto que esto es válido para cualquier $x \neq 0$, la función $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ es una solución explícita sobre el intervalo $(-\infty, 0)$ y también sobre $(0, \infty)$.

Definición 5.3 (Solución implícita) *Una relación $G(x, y) = 0$ se dice que es una **solución implícita** para la ecuación (5.2) sobre el intervalo I , siempre que exista al menos una función φ que satisfaga la relación así como la ecuación diferencial sobre I .*

Ejemplo 5.3 *Muestre que $x + y + e^{xy} = 0$ es una solución implícita para la ecuación no lineal*

$$(xe^{xy} + 1) \frac{dy}{dx} + ye^{xy} + 1 = 0$$

Solución.

Una vez que sabemos que y es una función diferenciable de x , podemos usar la técnica de diferenciación implícita. En efecto, de $(x + y + e^{xy} = 0)$ obtenemos al derivar con respecto a x y aplicar las reglas del producto y de la cadena,

$$\frac{d}{dx}(x + y + e^{xy}) = 1 + \frac{dy}{dx} + e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

o sea

$$(1 + xe^{xy}) \frac{dy}{dx} + ye^{xy} + 1 = 0$$

Por tanto, la relación $x + y + e^{xy} = 0$ es una solución implícita sobre algún intervalo garantizado por el **teorema de la función implícita**.¹

Intervalo de existencia

El intervalo de existencia de una solución a una ecuación diferencial se define como el intervalo más grande sobre el cual la solución se puede definir y seguir siendo una solución. Es importante recordar que se requiere que las soluciones de las ecuaciones diferenciales sean diferenciables, y esto implica que son continuas.

Familia de soluciones

Cuando resolvemos una ecuación diferencial de orden n , $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, usualmente obtenemos un conjunto de soluciones $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)$ donde c_i son constantes arbitrarias o parámetros. Tal conjunto de soluciones es llamado **familia de soluciones n-paramétrica**.

Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de los parámetros se llama **solución particular**.

Una solución que no es miembro de la familia de soluciones de la ecuación se llama **solución singular**.

Definición 5.4 (Solución general) Si toda solución de una EDO de n -ésimo orden $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ sobre un intervalo I se puede obtener a partir de una familia de n -parámetros $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)$ eligiendo apropiadamente los parámetros c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, entonces diremos que la familia es la **solución general** de la ecuación diferencial.

Nota: A nivel práctico la designación de solución general se aplica sólo a las EDO lineales.

Ejemplo 5.4 La función $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$. Algunas de las soluciones particulares son $y = 0$ (cuando $c_1 = c_2 = 0$), $y(x) = e^{-x}$ (cuando $c_1 = 0$, $c_2 = -1$), $y(x) = -3e^x + 5e^{-x}$ (cuando $c_1 = -3$, $c_2 = 5$)

Toda función de la familia monoparamétrica $y(x) = cx^4$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$. La función

$$y(x) = \begin{cases} -x^4 & , \quad x < 0 \\ x^4 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

¹Véase cálculo vectorial

es una solución particular.

Ejemplo 5.5 Una familia de soluciones de $y' = x\sqrt{y}$ es $y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$. La solución trivial $y = 0$ es una **solución singular** de la ecuación diferencial porque no se puede obtener partiendo de la familia y eligiendo algún valor del parámetro c .

Ejemplo 5.6 Compruebe que $\phi(x) = Ce^{-x^2}$ es una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$y' + 2xy = 0,$$

donde C es un número real arbitrario. Indique el intervalo en que la solución está definida.

Solución.

Las funciones $\phi(x) = Ce^{-x^2}$ y $\phi'(x) = -2xCe^{-x^2}$ substituidas en la ecuación diferencial produce $-2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} = 0$. Tanto $\phi(x)$ como $\phi'(x)$ están definidos en el intervalo $(-\infty, \infty)$, por lo que para cada número real C , $\phi(x) = Ce^{-x^2}$ es una solución de la ecuación dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Muestre que $\phi(x) = e^x + x$ es una solución explícita para

$$y' + y^2 = e^{2x} + (1 - 2x)e^x + x^2 - 1$$

sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

2. Muestre que $xy^3 - xy^3 \operatorname{sen} x = 1$ es una solución implícita para

$$y' = \frac{(x \cos x + \operatorname{sen} x - 1)y}{3(x - x \sin x)}$$

sobre el intervalo $(0, \pi/2)$.

En los problemas 3-5, determine si la función dada es una solución a la ecuación diferencial dada

3. $y = e^{2x} - 3e^{-x}$, $y'' - y' - 2y = 0$

4. $\theta = 2e^{3t} - e^{2t}$, $\theta'' - \theta\theta' + 3\theta = -2e^{2t}$

5. $y = 3\operatorname{sen}(2x) + e^{-x}, \quad y'' + 4y = 5e^{-x}$

En los problemas 6-10, determina si la relación dada es una solución implícita a la ecuación diferencial dada. Suponga que la relación define y implícitamente como una función de x y usar diferenciación implícita.

6. $x^2 + y^2 = 4, \quad y' = \frac{x}{y}$

7. $y - \ln y = x^2 + 1, \quad y' = \frac{2xy}{y-1}$

8. $x^2 - \operatorname{sen}(x+y) = 1, \quad y' = 2x \sec(x+y) - 1$

9. $\operatorname{sen} y + xy - x^3 = 2, \quad y'' = \frac{6xy' + (y')^3 \operatorname{sen} y - 2(y')^2}{3x^2 - y}$

En los ejercicios 10-12, muestre que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas.

10. $y = \sqrt{x(x-C)}, \quad (x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$

11. $y = xe^{-Cy-1}, \quad x \left(\ln \frac{x}{y} \right) y' - y = 0$

12. $y = 2 + C\sqrt{1+x^2}, \quad (1-x^2) y' + x(y-2) = 0$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

En esta capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

o equivalentemente escrita en **forma diferencial** como

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Alternaremos entre métodos para encontrar soluciones exactas y algunas aplicaciones que se pueden estudiar usando esos métodos. Para cada aplicación, derivaremos cuidadosamente los modelos matemáticos y exploraremos la existencia de soluciones exactas.

6.1. Problemas de valor inicial

Sabemos que en la solución general de una ecuación diferencial, hay presencia de constantes indeterminadas. Esto refleja el hecho de que una ecuación diferencial ordinaria tiene infinitas soluciones. En las aplicaciones, es necesario utilizar otra información, además de la ecuación diferencial, para determinar el valor de la constante y especificar la solución por completo. Tal solución se llama **solución particular**.

Definición 6.1 Una ecuación diferencial de primer orden junto con una condición inicial,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{6.1}$$

se llama **problema de valor inicial**. Una solución del problema de valor inicial es una función diferenciable $y(x)$ tal que

1. $y'(x) = f(x, y(x))$ para todo x en un intervalo que contiene x_0 donde $y(x)$ está definido, y
2. $y(x_0) = y_0$.

Así, la función $y(x) = -\frac{1}{x-1}$ es solución del problema de valor inicial

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

De manera similar, un problema con valores iniciales en n -ésimo orden es definida como

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde los valores de $y(x)$ y de sus $n-1$ derivadas en un solo punto x_0 , $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman **condiciones iniciales**.

6.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

Comenzaremos con dos preguntas muy básicas sobre un problema de valor inicial.

- ¿Cuándo podemos estar seguros de que existe una solución?
- ¿Cuántas soluciones diferentes hay para un problema de valor inicial dado?

Enunciaremos aquí, sin demostrarlo, un teorema que define las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de una solución de un problema de valor inicial de primer orden.

Teorema 6.1 (Existencia y Unicidad de Solución) *Consideremos el problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en algún rectángulo

$$\Omega = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$$

que contiene al punto (x_0, y_0) , entonces el problema de valor inicial tiene una única solución $y(x)$ en algún intervalo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, donde $\delta > 0$.

Interpretación geométrica

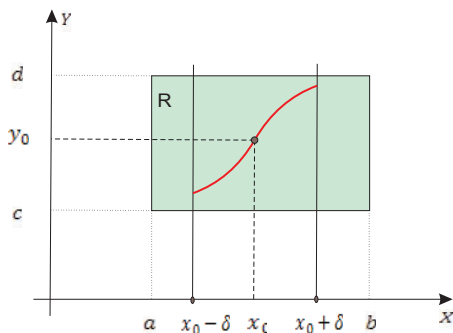


Figura 6.1:

Ejemplo 6.1 Considere la ecuación $y' = y + 3x^2$. ¿Existe una solución a esta ecuación con la condición inicial $y(1) = 2$? Si es así, ¿la solución es única?

Solución.

Para empezar, escribimos la ecuación en forma normal

$$y' = y/x + 3x$$

El lado derecho, $f(x, y) = y/x + 3x$, es continuo excepto donde $x = 0$. Podemos tomar Ω como cualquier rectángulo que contenga el punto inicial $(1, 2)$ y evite $x = 0$. Una buena elección es definir Ω por $1/2 < x < 2$ y $0 < y < 4$. Entonces f es continua en todo Ω , por lo que se satisfacen las hipótesis del teorema de existencia. Podemos concluir que hay una solución al problema del valor inicial. Además, dado que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$ también es continua en todo Ω , las hipótesis de unicidad también se cumplen. En consecuencia, sólo hay una solución.

Ejemplo 6.2 Considere la ecuación $y' = y^{1/3}$. ¿Existe una solución a esta ecuación con la condición inicial $y(0) = 0$? Si es así, ¿la solución es única?

Solución.

La ecuación dada ya está en forma normal. El lado derecho $f(x, y) = y^{1/3}$ es continua en cualquier Ω conteniendo a $(0, 0)$. Lo que implica que el problema de valor inicial dada tiene una solución en algún intervalo que contiene a $x_0 = 0$. Por otra parte, puesto que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$ es discontinua en $(0, 0) \in \Omega$, no satisface las hipótesis del teorema de unicidad. Por tanto, el problema de valor inicial no tiene solución única.

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los problemas 1-5, determine si el teorema 6.1 garantiza o no la existencia de una solución al problema de valor inicial dado. Si la existencia está asegurada, determine cuándo el teorema 6.1 garantiza o no la unicidad de esa solución.

1. $yy' = x - 1$, $y(0) = 1$
2. $y' = xy^{1/3}$, $y(0) = 0$
3. $y' = \sqrt{x - y}$, $y(2) = 2$
4. $y' = \ln(1 + y^2)$, $y(0) = 0$
5. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$

6.3. Ecuaciones de variables separables y reducibles a separables

6.3.1. Ecuaciones separables

Una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.3)$$

es de variables separables si el segundo miembro de (6.3) se puede expresar como el producto (o cociente) de dos funciones en la que una depende solamente de x y la otra de y :

$$\frac{dy}{dx} = g(x) u(y) = \frac{g(x)}{h(y)}, \quad (6.4)$$

donde $h(y) = 1/u(y)$.

Podemos resolver cualquier ecuación separable de la forma (6.4) siguiendo los siguientes tres pasos:

1. Separe las variables: $h(y) dy = g(x) dx$.
2. Integre ambos lados

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx$$
$$H(y) = G(x) + C, \quad C \text{ es una constante arbitraria.}$$

3. Resuelva para la solución $y(x)$, si es posible.

Nótese que el paso 2 define y implícitamente como una función de x .

Ejemplo 6.3 Resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{2-3x}{3y^2-y}$.

Solución.

Al separar las variables escribimos como

$$(3y^2 - y) dy = (2 - 3x) dx$$

Integrando ambos lados respecto de x , tenemos

$$\begin{aligned} \int (3y^2 - y) dy &= \int (2 - 3x) dx \\ y^3 - \frac{y^2}{2} &= 2x - \frac{3}{2}x^2 + C, \end{aligned}$$

donde C es una constante. Esta ecuación da la solución general en forma implícita. En este caso, es imposible resolver la ecuación para expresar y explícitamente como una función de x .

Ejemplo 6.4 Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+y}, \quad y(0) = 1.$$

Solución.

Cuando separamos las variables, se escribe como

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = 2x dx.$$

Al integrar ambos lados se obtiene

$$y + \ln|y| = x^2 + C.$$

La condición $y(0) = 1$, nos lleva a que $C = 1$. Por tanto, la solución particular es dada implícitamente por

$$y + \ln|y| = x^2 + 1 \quad \text{o} \quad y + \ln|y| - x^2 - 1 = 0.$$

Ejemplo 6.5 Resuelva la solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2}{x^2}.$$

Solución.

Factorizando el numerador del lado derecho, vemos que es separable.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 + y^2(1 - x^2)}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^2} \cdot (y^2 + 1).$$

Al separar las variables e integrar ambos lados se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy &= \int \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx \\ \arctan y &= -\frac{1}{x} - x + C. \end{aligned}$$

Resolviendo para y encontramos

$$y(x) = \tan \left(-\frac{1}{x} - x + C \right).$$

Ejemplo 6.6 Resuelva $\frac{dy}{dx} = 3x(y-1)^{2/3}$.

Solución

Al separar variables e integrar ambos lados, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(y-1)^{2/3}} dy &= \int 3x dx \\ 3(y-1)^{1/3} &= \frac{3x^2}{2} + C, \end{aligned}$$

de donde, resolviendo para y encontramos la solución explícita: $y(x) = 1 + \left(\frac{x^2}{2} + C \right)^3$.

Observación. Hay que tener cuidado al separar las variables; pues las variables que sean divisores podrían ser cero en un punto y esto puede dar lugar a que se pierdan soluciones. Podemos notar en este último ejemplo, que ningún valor de C nos lleva a la solución singular $y(x) = 1$, lo cual se perdió cuando se separaron las variables.

6.3.2. Ecuaciones reducibles a separables

Ciertas ecuaciones diferenciales de primer orden no son separables; sin embargo algunas de ellas se pueden reducir a separables con una sustitución adecuada.

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

se reduce a una ecuación diferencial de variables separables con la sustitución $z = ax + by + c$. Esto es,

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reduce a una ecuación diferencial de variables separables con la sustitución $y = ux$. Esto es

$$g(u) = u + x \frac{du}{dx}.$$

A continuación tenemos los ejemplos.

Ejemplo 6.7 *Resuelva* $\frac{dy}{dx} = x - y + 5$.

Solución.

Haciendo $z = x - y + 5$, se obtiene $\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} = 1 - z$. Al separar las variable e integrar ambos lados, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z-1} dz &= - \int dx \\ \ln |z-1| &= -x + C \\ z &= 1 + Ce^{-x}. \end{aligned}$$

Expresando en términos de x e y , escribimos la solución explícita como $y(x) = -Ce^{-x} + x + 4$.

Ejemplo 6.8 *Resuelva* $\frac{dy}{dx} = (8x - 2y + 5)^2$.

Solución.

Con la sustitución $z = 8x - 2y + 5$, tenemos $\frac{dz}{dx} = 8 - 2z^2$. Separando las variables integramos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{z^2 - 4} dz &= \int -2dx \\ \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z-2}{z+2} \right| &= -2x + C \\ \frac{z-2}{z+2} &= Ce^{-8x} \\ z &= \frac{4}{1 - Ce^{-8x}} - 2.\end{aligned}$$

Expresando en términos de x e y , la solución queda expresada en forma explícita

$$y(x) = \frac{7}{2} + 4x - \frac{2}{1 - Ce^{-8x}}.$$

Ejemplo 6.9 Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{2x + 4y}$.

Solución.

Primero reescribiendo la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{2(x + 2y + 3) - 6}$$

Haciendo $z = x + 2y + 3$ se tiene $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z}{z-3}$. Al separar las variables e integrar, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{z-3}{2z-3} dz &= \int dx \\ \frac{1}{2}z - \frac{3}{4} \ln \left| z - \frac{3}{2} \right| &= x + C \\ \frac{1}{2}(x + 2y + 3) - \frac{3}{4} \ln \left| x + 2y + \frac{3}{2} \right| &= x + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.10 Resuelva $xy' = y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y$.

Solución.

Expresando en forma equivalente

$$y' = x^2(y/x - 1)^3 + y/x,$$

la sustitución $y = ux$ nos conduce a $u + xu' = x^2(u-1)^3 + u$. Al separar las variables e integrar ambos lados, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(u-1)^3} du &= \int x dx \\ -\frac{1}{2(u-1)^2} &= \frac{x^2}{2} + C \\ -\frac{x^2}{(y-x)^2} &= \frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-10, resuelva las ecuaciones diferenciales de variables separables.

1. $y' = xy + y$
2. $y^3 y' = x + 2y'$
3. $x^2 y' = y \ln y - y'$
4. $y' x \ln x = y$
5. $3x \frac{dy}{dx} = \frac{1-4y^2}{y}$
6. $xyy' = 1 - x^2$
7. $(1-y)e^y y' + \frac{y^2}{x \ln x} = 0$
8. $\frac{dy}{dx} = y^2(15y - xy \cos x)$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y^4 - y^4}{1 - y^4 x + x - y^4}$
10. $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 - y^2 + x - 1}{x^2 y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2}$

En los ejercicios 11-15, resuelva el problema de valor inicial. Indique el intervalo de existencia.

11. $y' + xy + y = 0, \quad y(-2) = 1$

12. $y' = (\operatorname{sen} x) / y, \quad y(\pi/2) = 1$

13. $2xy' - \ln x^2 = 0, \quad y(1) = 2$

14. $\frac{dy}{dx} = yx \operatorname{sen}(x^2), \quad y(0) = 1$

15. $2x(y+1)dx - ydy = 0, \quad y(0) = -2$

En los ejercicios 16-25, resuelva la ecuación diferencial dada con una sustitución adecuada.

16. $(x^2 + 2xy + y^2) y' = 9$

17. $xy^2(xy' - y) = 1$

18. $y' = 4(x + y + 1)^2$

19. $y' = \tan^2(x + y)$

20. $y' = \frac{1 - x - y}{x + y}$

21. $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

22. $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

23. $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0$

24. $(1 + x^2y^2)y + (xy - 1)^2xy' = 0$

25. $(x^2y^3 + y + x - 2)dx + (x^3y^2 + x)dy = 0$

6.4. Ecuaciones con coeficientes homogéneos y reducibles a homogéneos

6.4.1. Ecuaciones con coeficientes homogéneos

Definición 6.2 (Función homogénea) La función $f(x, y)$ se dice que es homogénea de grado α en x e y , si

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y),$$

donde α es un número real.

Así por ejemplo, la función $f(x, y) = 3x^4y^2 - 2xy^5$ es homogénea de grado 6, por que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 3(tx)^4(ty)^2 - 2(tx)(ty)^5 = 3t^6x^4y^2 - 2t^6xy^5 \\ &= t^6(3x^4y^2 - 2xy^5) = t^6f(x, y); \end{aligned}$$

en cambio la función $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3$ es no homogénea.

Definición 6.3 Una ecuación diferencial de primer orden en forma diferencial

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (6.5)$$

se dice que es **homogénea** si ambas funciones coeficientes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Es decir,

$$P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^\alpha Q(x, y).$$

Teorema 6.2 Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son ambos homogéneos y del mismo grado, la función $P(x, y)/Q(x, y)$ es homogéneo de grado cero.

Teorema 6.3 Si la ecuación (6.5) es una ecuación diferencial homogénea, entonces el cambio de variable $y = ux$ la transforma en una ecuación diferencial de variables separables.

Prueba

Supongamos que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son de grado k . Sea $y = ux$ y $dy = udx + xdu$. Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} P(x, ux) dx + Q(x, ux) (udx + xdu) &= 0 \\ x^k P(1, u) dx + x^k Q(1, u) (udx + xdu) &= 0 \end{aligned}$$

dividiendo entre x^p y agrupando se tiene

$$\begin{aligned} [P(1, u) + uQ(1, u)] dx + xQ(1, u) du &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{Q(1, u)}{P(1, u) + uQ(1, u)} du &= 0 \end{aligned}$$

ecuación que es de variables separables en x y u como queríamos demostrar.

Ejemplo 6.11 Resuelva $(y^2 + 2xy) dx - x^2 dy = 0$.

Solución.

Nótese que $P(x, y) = y^2 + 2xy$ y $Q(x, y) = -x^2$ son funciones homogéneas de grado dos:

$$\begin{aligned} P(tx, ty) &= (ty)^2 + 2(tx)(ty) = t^2 P(x, y). \\ Q(tx, ty) &= -(tx)^2 = t^2 (-x^2) = t^2 Q(x, y). \end{aligned}$$

Entonces, haciendo $y = ux$ y por lo tanto $dy = udx + xdu$, obtenemos

$$\begin{aligned} [u^2 x^2 + 2x(ux)] dx - x^2 (udx + xdu) &= 0 \\ x^2 (u^2 + u) dx - x^3 du &= 0. \end{aligned}$$

Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{u^2 + u} \\ &= \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u + 1} \\ \ln |x| &= \ln |u| - \ln |u + 1| + C \\ \ln |x| &= \ln \left| \frac{u}{u + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ obtenemos la solución en forma implícita.

$$\ln \left| \frac{y}{y + x} \right| - \ln |x| + C = 0.$$

Ejemplo 6.12 Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \quad y(1) = 2.$$

Solucion.

Escribiendo en forma diferencial

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0,$$

con $P(x, y) = x^2 - 3y^2$ y $Q(x, y) = 2xy$ que verifican de ser del mismo grado

$$P(tx, ty) = (tx)^2 - 3(ty)^2 = t^2(x^2 - 3y^2) = t^2 P(x, y)$$

$$Q(tx, ty) = 2(tx)(ty) = t^2(2xy) = t^2 Q(x, y),$$

la sustitución $y = ux$ y por lo tanto $dy = udx + xdu$, nos conduce a

$$\begin{aligned} x^2(1 - 3u^2) dx + 2x(ux)(udx + xdu) &= 0 \\ x^2(1 - u^2) dx + 2ux^3 du &= 0. \end{aligned}$$

Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{2u}{u^2 - 1} du &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{2u}{u^2 - 1} du &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln |u^2 - 1| &= \ln |x| + \ln C \end{aligned}$$

Usando propiedades de valor absoluto escribimos $u^2 = Cx + 1$, y que al expresar en la variable original resulta $y^2 = cx^3 + x^2$. Finalmente, la condición inicial $y(1) = 2$ nos permite encontrar $C = 3$. Así, la solución del problema de valor inicial es: $y^2 = 3x^3 + x^2$.

Ejemplo 6.13 *Resuelva la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos(y/x) - x}{x \cos(y/x)}.$$

Solución.

Expresando en forma diferencial

$$\left(1 - \frac{y}{x} \cos(y/x)\right) dx + \cos(y/x) dy = 0$$

se observa que es homogénea, por lo que, haciendo $y = ux$ y por tanto $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ó $dy = udx + xdu$, se obtiene

$$\begin{aligned} (1 - u \cos u) dx + \cos u (udx + xdu) &= 0 \\ dx + x \cos u du &= 0 \end{aligned}$$

Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= -\int \cos u du \\ \ln |x| &= -\operatorname{sen} u + C \\ u &= \operatorname{arc sen}(C - \ln |x|)\end{aligned}$$

Expresando en términos de x e y , la solución explícita es: $y(x) = x \operatorname{arc sen}(C - \ln |x|)$.

6.4.2. Ecuaciones reducibles a coeficientes homogéneos

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (6.6)$$

donde $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$, se reducen a homogéneas con la sustitución:

$$x = z + h, \quad y = w + k,$$

siendo (h, k) el punto de intersección de las rectas

$$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{y} \quad L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Ejemplo 6.14 *Resuelva el problema de valor inicial*

$$(x + y + 2) dx + (x - y + 4) dy = 0, \quad y(0) = 1$$

Solución.

Escribiendo en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{-(x - y + 4)}$$

consideremos las rectas $L_1 : x + y + 2 = 0$ y $L_2 : x - y + 4 = 0$. Ya que estas tienen pendientes diferentes, existe un único punto de intersección (h, k) entre dichas rectas, esto es, $h = -3$, $k = 1$. Entonces con la sustitución $x = z - 3$, $y = w + 1$ y por tanto $dx = dz$ y $dy = dw$, al reemplazar en la ecuación en forma diferencial se obtiene

$$(z + w) dz + (z - w) dw = 0.$$

Como ésta ya es homogénea, haciendo $w = uz$ y por tanto $dw = u dz + z du$, se tiene

$$(z + uz) dz + (z - uz)(z du + u dz) = 0.$$

De esto, efectuando operaciones algebraicas, se sigue que

$$(1 + 2u - u^2) dz + z(1 - u) du = 0.$$

De donde, al separar las variables e integrar se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{u-1}{1+2u-u^2} du &= \frac{dz}{z} \\ \ln|z| + \frac{1}{2} \ln|1+2u-u^2| &= \ln C \end{aligned}$$

o sea

$$z^2(1+2u-u^2) = C.$$

En términos de las variables x e y escribimos

$$(x+1)^2 \left[1 + 2\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2} \right] = C$$

o equivalentemente

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

Finalmente, la condición inicial $y(0) = 1$ nos permite encontrar $C = 7$. Así, la solución del problema de valor inicial es: $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y - 7 = 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-7, resuelva las ecuaciones diferenciales con coeficientes homogéneos

1. $(xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$

2. $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{4xy}$

4. $2x(x^2 + y^2)y' = y(y^2 + 2x^2)$

5. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$

6. $x(x+y)^2 y' = y(x^2 + xy + y^2)$

$$7. \quad y' = \frac{y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}$$

En los ejercicios 8-12, resuelva las ecuaciones diferenciales reducibles a homogénea.

$$8. \quad y' = \frac{y - x + 5}{2x - y - 4}$$

$$9. \quad y' = \frac{x - y + 15}{x + 2y + 7}$$

$$10. \quad (x - y + 3) dx + (x + y - 1) dy$$

$$11. \quad (x - y) dx + (x + y - 4) dy = 0$$

$$12. \quad (3x + y - 2) + y' (x - 1) = 0$$

6.5. Ecuaciones diferenciales exactas y Factores integrantes

6.5.1. Ecuaciones exactas

En las secciones anteriores se vio que cuando una ecuación tiene la forma

$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

un conjunto de soluciones es determinado por integración, es decir, encontramos una función cuya diferencial es $M(x) dx + N(y) dy$.

La idea puede extenderse para algunas funciones de la forma

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \tag{6.7}$$

en el que separación de variables puede no ser posible. Supóngase que una función $F(x, y)$ es encontrado tal que su diferencial es la expresión $Mdx + Ndy$; es decir

$$dF = Mdx + Ndy.$$

Entonces es claro que

$$F(x, y) = C$$

define implícitamente una familia de soluciones de (6.7). Pues es inmediato ver que

$$dF = 0,$$

o sea

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Definición 6.4 La ecuación diferencial (6.7). se llama **ecuación diferencial exacta** en una región Ω del plano xy si su primer miembro es la **diferencial total** de una función continuamente diferenciable $F(x, y)$, es decir,

$$dF = Mdx + Ndy.$$

Como la diferencial total de $F(x, y)$ es dada por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

entonces

$$M = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Observación:

a) $\frac{\partial F}{\partial x}$ se lee: derivada parcial de F respecto a x ; b) $\frac{\partial F}{\partial y}$ se lee: derivada parcial de F respecto a y .

Así por ejemplo, si $F(x, y) = x^2y^3 + \cos y + e^{2x}$, entonces las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$, y $\frac{\partial F}{\partial y}$ se determinan como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 + 2e^x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - \operatorname{sen} y.$$

Teorema 6.4 Si $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ son funciones continuas de x e y , entonces la condición necesaria y suficiente para que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

sea una **ecuación diferencial exacta** es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (6.8)$$

Prueba. Demostraremos sólo la condición necesaria.

Para simplificar supongamos que M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Si la expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es exacta, entonces existe una función F tal que para todo x, y de $\mathbb{R}$,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Lo que implica que

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La igualdad de las derivadas parciales mixtas es consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$.

Método de solución

Dada una ecuación de la forma $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, se determina si es válida la igualdad (6.8). En caso afirmativo, existe una función f para la cual

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y).$$

Podemos determinar F si integramos $M(x, y)$ con respecto a x , manteniendo y constante:

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + \phi(y), \quad (6.9)$$

en donde la función arbitraria $\phi(y)$ es la constante de integración. Ahora derivamos (6.9) con respecto a y , y suponemos que $\partial F / \partial y = N(x, y)$ o sea

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \phi'(y) = N(x, y).$$

De donde,

$$\phi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx. \quad (6.10)$$

Por último integramos (6.10) con respecto a y y sustituimos el resultado en la ecuación (6.9). Así, la solución general de la ecuación es $F(x, y) = C$.

Observación 6.1 *Es posible también iniciar el procedimiento anterior suponiendo que existe F tal que $\partial F / \partial y = N(x, y)$. Después de integrar N con respecto a y y derivar el resultado, llegaríamos a los análogos de las ecuaciones (6.9) y (6.10) que serían respectivamente,*

$$F(x, y) = \int N dy + \psi(x) \quad y \quad \psi'(x) = M - \frac{\partial}{\partial x} \int N dy.$$

Ejemplo 6.15 *Muestre que la ecuación $\cos(x + y) dx + (2y + \cos(x + y)) dy = 0$ es exacta y halle la solución general.*

Solución.

Puesto que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\cos(x+y)) = -\operatorname{sen}(x+y) = \frac{\partial}{\partial x} (2y + \cos(x+y))$$

se concluye que la ecuación es exacta. Para encontrar la solución general, debemos determinar una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x+y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \cos(x+y). \quad (6.11)$$

Al elegir la primera ecuación de (7.19) y al integrar se obtiene

$$F(x, y) = \int \cos(x+y) dx + \phi(y) = \operatorname{sen}(x+y) + \phi(y).$$

Para encontrar $\phi(y)$ usamos la segunda ecuación de (7.19), esto es

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(x+y) + \phi'(y) = 2y + \cos(x+y).$$

Por consiguiente, $\phi'(y) = 2y$, tiene solución es $\phi(y) = y^2$ Finalmente, $F(x, y) = \operatorname{sen}(x+y) + y^2$ y la solución es dada implícitamente por

$$F(x, y) = \operatorname{sen}(x+y) + y^2 = C.$$

Ejemplo 6.16 *Resuelva la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 2y}{2x^2y + 2x}$$

Solución.

Expresando en forma diferencial vemos que $M = 2xy^2 + 2y$, $N = 2x^2y + 2x$; y se comprueba que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy + 2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Para encontrar la solución general, debemos determinar una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 + 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + 2x. \quad (6.12)$$

Al integrar la segunda ecuación de (7.20) respecto a la variable y , se tiene

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int (2x^2y + 2x) dy + \psi(x) \\ &= x^2y^2 + 2xy + \psi(x) \end{aligned}$$

Para encontrar $\psi(x)$ usamos la primera ecuación de (7.20), esto es.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 + 2y + \psi'(x) = 2xy^2 + 2y.$$

Como se quiere que $\psi'(x) = 0$, basta tomar $\psi(x) = 0$. Así, $F(x, y) = x^2y^2 + 2xy$ y la solución es dada implícitamente por

$$F(x, y) = x^2y^2 + 2xy = C.$$

6.5.2. Factores integrantes

En algunos casos, por cierto excepcionales, cuando la ecuación

$$Mdx + Ndy = 0$$

no es exacta, se puede encontrar una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicar a dicha ecuación, el lado izquierdo resulta una diferencial total de una función F , o sea

$$dF = \mu Mdx + \mu Ndy.$$

Definición 6.5 *Un factor integrante para la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$ es una función $\mu = \mu(x, y)$ tal que la forma*

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0$$

es exacta.

Con el propósito de encontrar $\mu = \mu(x, y)$, partimos del hecho que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N).$$

Efectuando las derivadas parciales respectivas

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}.$$

y agrupando términos se puede escribir como

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu. \quad (6.13)$$

Lo cual, es una ecuación en derivadas parciales que involucra al factor integrante μ que deseamos conocer.

Consideraremos los siguientes dos casos particulares:

Caso 1. Si $\mu = \mu(x)$ y si llamamos $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = g(x)$, entonces el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx}.$$

Caso 2. Si $\mu = \mu(y)$ y si llamamos $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = h(y)$, entonces el factor integrante es:

$$\mu(y) = e^{\int h(y) dy}.$$

Ejemplo 6.17 Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x^2} \operatorname{sen} 3x - 2x^3 y^2}{2x^2 y - 2y + e^{-x^2}}$$

Solución.

Expresando en forma diferencial

$$\left(2x^3 y^2 - e^{-x^2} \operatorname{sen} 3x \right) dx + \left(2x^2 y - 2y + e^{-x^2} \right) dy = 0,$$

se tiene $\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 4xy - 2xe^{-x^2}$ y por tanto no es exacta. Sin embargo, desde que

$$g(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 2x$$

el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}.$$

Multiplicando con este factor integrante a ambos lados de la ecuación, expresada en forma diferencial, obtenemos una ecuación que ya es exacta

$$\underbrace{\left(2x^3 y^2 e^{x^2} - \operatorname{sen} 3x \right) dx}_{\overline{M}} + \underbrace{\left[2ye^{x^2} (x^2 - 1) + 1 \right] dy}_{\overline{N}} = 0.$$

Por lo que existe una función $F(x, y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = \overline{M}$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = \overline{N}$. Al integrar con respecto a y tenemos

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \overline{N} dy + \psi(x) \\ &= (x^2 - 1)y^2 e^{x^2} + y + \psi(x). \end{aligned}$$

Para encontrar $\psi(x)$, usamos el hecho que $\frac{\partial F}{\partial x} = \overline{M}$, o sea

$$2x^2 y^2 e^{x^2} + \psi'(x) = 2x^3 y^2 e^{x^2} - \operatorname{sen} 3x$$

Como se quiere que $\psi'(x) = -\operatorname{sen} 3x$, una solución es $\psi(x) = \frac{1}{3} \cos 3x$. Así, $F(x, y) = (x^2 - 1)y^2 e^{x^2} + y + \frac{1}{3} \cos 3x$ y la solución general es dada implícitamente por

$$F(x, y) = (x^2 - 1)y^2 e^{x^2} + y + \frac{1}{3} \cos 3x = C.$$

Ejemplo 6.18 Resuelva la ecuación

$$2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$$

Solución.

En este caso, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x(1 + \ln y)$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$, así que la ecuación no es exacta. Sin embargo,

$$h(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \frac{1}{2xy \ln y} (2x - 2x(\ln y + 1)) = -\frac{1}{y}.$$

Entonces, el factor integrante es

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = \frac{1}{y}, \quad y > 0$$

Multiplicando con este factor integrante a la ecuación dada, se obtiene la ecuación diferencial que ya es exacta

$$\underbrace{2x \ln y dx}_{\overline{M}} + \underbrace{(x^2 y^{-1} + y \sqrt{y^2 + 1}) dy}_{\overline{N}} = 0.$$

Lo que implica que existe una función $F(x, y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = \overline{M}$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = \overline{N}$. Al integrar respecto a x , se tiene

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \overline{M} dx \\ &= \int 2x \ln y dx = x^2 \ln y + \phi(y). \end{aligned}$$

Ahora, con el fin de hallar $\phi(y)$ se puede usar $\frac{\partial F}{\partial y} = \overline{N}$.

$$\begin{aligned} x^2 y^{-1} + \phi'(y) &= x^2 y^{-1} + y \sqrt{y^2 + 1} \\ \phi'(y) &= y \sqrt{y^2 + 1}. \end{aligned}$$

De donde, una solución es $\phi(y) = \frac{(y^2 + 1)^{3/2}}{3}$. y por consiguiente, la solución general es dada implícitamente por

$$F(x, y) = x^2 \ln y + \frac{(y^2 + 1)^{3/2}}{3} = C.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-5, determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta resuelva.

1. $2x(3x + y - ye^{-x^2}) dx + (x^2 + 3y^2 + e^{-x^2}) dy = 0$
2. $[x(3x - 2) - y] dx + [y(2 + 3y) - x] dy = 0$
3. $\left(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0$
4. $(y \ln y - e^{-xy}) dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y\right) dy = 0$
5. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right) dy = 0$

En los ejercicios 6-10, resuelva la ecuación dada hallando un factor integrante apropiada.

6. $(xy - 2) dx + (x^2 - xy) dy = 0$
7. $y(x + y + 1) dx + (x + 2y) dy = 0$
8. $(y^2 + xy^3) dx + (5y^2 - xy + y^3 \operatorname{sen} y) dy = 0$
9. $(2xy^2 - 3y^3) dx + (7 - 3xy^2) dy = 0$
10. $(1 - x^2y) dx + x^2(y - x) dy = 0$

En los ejercicios 11-15, resuelva el problema de valor inicial dada, encontrando un factor integrante apropiada.

11. $x dx + (x^2y + 4y) dy = 0, \quad y(4) = 0$
12. $(1 - x^2y) dx + x^2(y - x) dy = 0, \quad y(2) = 1$
13. $(2xe^{-x} + y) dx + (1 + 3y^2e^{-x}) dy = 0, \quad y(0) = 1$
14. $(x^4 \ln x - 2xy^3) dx + 3x^2y^2 dy = 0, \quad y(1) = -2$
15. $(x^2 + y^2 - 5) dx = (y + xy) dy, \quad y(0) = 1$

6.6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

se dice que es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y .

Dividiendo ambos lados por el coeficiente $a_1(x)$, obtenemos la forma estándar de la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (6.14)$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas sobre un intervalo I . Observemos que si $q(x) = 0$, la ecuación (8) se convierte en una ecuación de variables separables, así que vamos a considerar $q(x) \neq 0$. El método usual para resolver la ecuación (6.14) es multiplicar ambos miembros de la ecuación por una función apropiada $I(x)$ que se conoce como **factor integrante** que convierte el miembro de la izquierda de la ecuación (cuando se multiplica por $I(x)$) en la derivada de un producto $[I(x) \cdot y]$; es decir:

$$\begin{aligned}
I(x) [y' + p(x)y] &= \frac{d}{dx} (I(x)y) \\
I(x)y' + I(x)p(x)y &= I(x)y' + yI'(x) \\
I(x)p(x)y &= yI'(x) \\
p(x) &= \frac{I'(x)}{I(x)},
\end{aligned}$$

de donde, $I(x) = e^{\int p(x)dx+C} = Ke^{\int p(x)dx}$. Estamos buscando un factor integrante particular, y no el más general, de modo que tomamos $K = 1$ y utilizamos

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

como factor de integración.

La ecuación (6.14) se puede resolver siguiendo los siguientes tres pasos:

1. Multiplique por el factor integrante

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

tal que la ecuación (6.14) se convierta en

$$\frac{d}{dx} (Iy) = I \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y \right) = Iq(x).$$

2. Integre esta ecuación para obtener

$$I(x)y = \int I(x)q(x)dx + C.$$

3. Resuelva para $y(x)$.

Ejemplo 6.19 Halle la solución general de la ecuación $e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = 5xe^x$.

Solución.

Al reescribir la ecuación como

$$y' + 2xy = 5xe^{-x^2}$$

identificamos a $p(x) = 2x$. Entonces un factor integrante es

$$I(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}.$$

Multiplicando por el factor integrante, se tiene

$$\underbrace{e^{x^2} \left(\frac{dy}{dx} + 2xy \right)}_{\frac{d}{dx} (e^{x^2} y)} = 5xe^x$$

Integrando ambos lados, tenemos

$$e^{x^2} y = \int 5xe^x dx = 5xe^x - 5e^x + C.$$

Resolviendo para y , encontramos

$$y(x) = e^{-x^2} [5e^x (x - 1) + C].$$

Ejemplo 6.20 Resuelva el problema de valor inicial

$$y' = y \tan x + \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 2$$

Solución.

Reescribimos la ecuación como

$$y' - y \tan x = \operatorname{sen} x,$$

Con $p(x) = -\tan x$, un factor integrante es

$$I(x) = e^{\int -\tan x dx} = e^{\ln|\cos x|} = \cos x$$

Multiplicando por el factor integrante, se tiene

$$\underbrace{\cos x (y' - y \tan x)}_{\frac{d}{dx} (y \cos x)} = \operatorname{sen} x \cos x$$

Integrando ambos lados tenemos

$$y \cos x = \int \operatorname{sen} x \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$$

Finalmente, resolviendo para y , se obtiene la solución general

$$y(x) = -\frac{\cos x}{2} + \frac{C}{\cos x}.$$

Para encontrar la solución particular, se sustituye $y(0) = 2$ en la solución general y encontramos $C = 5/2$. Así, la solución particular es

$$y(x) = -\frac{\cos x}{2} + \frac{5}{2 \cos x}.$$

Ejemplo 6.21 Halle la solución general de la ecuación

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Solución.

Reescribimos la ecuación en su forma estandar

$$y' + \left(-\frac{1}{x}\right)y = x^2 + 3x - 2$$

Con $p(x) = -\frac{1}{x}$, un factor integrante es

$$I(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Multiplicando por el factor integrante resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left[y' + \left(-\frac{1}{x}\right)y \right] &= x + 3 - \frac{2}{x} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) &= x + 3 - \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Al integrar ambos lados, se obtiene

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C,$$

Finalmente, al resolver por y , encontramos

$$y(x) = x \left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right).$$

Observación 6.2 Puede ocurrir que la ecuación diferencial sea lineal respecto de x , es decir de la la forma

$$\frac{dx}{dy} + r(y)x = \varphi(y).$$

Ilustramos este caso, con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.22 *Resuelva la ecuación*

$$ydx + (3x - xy + 2) dy = 0$$

Solución.

Puesto que el producto ydy ocurre aquí, la ecuación es no lineal en y . Sin embargo, es lineal en x . Por lo que, expresando a la forma estándar es

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y} - 1\right)x = \frac{-2}{y}, \quad y \neq 0.$$

Con $p(y) = \left(\frac{3}{y} - 1\right)$, un factor integrante es

$$I(y) = e^{\int \left(\frac{3}{y} - 1\right) dy} = e^{3 \ln|y| - y} = y^3 e^{-y}, \quad y > 0.$$

Al multiplicar por este factor integrante, se tiene

$$\begin{aligned} y^3 e^{-y} \left[\frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y} - 1\right)x \right] &= -2y^2 e^{-y} \\ \frac{d}{dy} (xy^3 e^{-y}) &= -2y^2 e^{-y} \end{aligned}$$

Al integrar los extremos, obtenemos

$$\begin{aligned} xy^3 e^{-y} &= -2 \int y^2 e^{-y} dy \\ &= 2y^2 e^{-y} + 4ye^{-y} + 4e^{-y} + C. \end{aligned}$$

Por tanto, una familia de soluciones es definida explícitamente por

$$x(y) = \frac{2}{y} + \frac{4}{y^2} + \frac{4}{y^3} + \frac{Ce^y}{y^3}.$$

Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial no lineal conocida como **ecuación de Bernoulli**

$$y' + p(x)y = q(x)y^n; \quad n \neq 0, n \neq 1 \quad (6.15)$$

fue propuesto para su resolución por James Bernoulli en diciembre de 1695. Posteriormente en 1696, Leibniz señaló que la ecuación se puede reducir a una ecuación lineal al considerar $z = y^{1-n}$ como variable dependiente.

La demostración se realiza en dos pasos:

Primero: Se multiplica a ambos miembros de la ecuación (6.15) por y^{-n}

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x), \quad (6.16)$$

Segundo: El cambio de variable $z = y^{1-n}$ tal que $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$, nos conduce a la ecuación lineal en z , esto es

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = (1-n)[q(x) - p(x)z].$$

Al transponer los términos, se escribe en la forma estandar

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Ejemplo 6.23 Encuentre la solución general de la ecuación no lineal

$$y' + y = xy^3.$$

Solución.

Multiplicando por y^{-3} resulta

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + y^{-2} = x$$

Haciendo $z = y^{-2}$ se tiene la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} = -2 \left(y^{-3} \frac{dy}{dx} \right) = -2(x - z),$$

o sea

$$\frac{dz}{dx} - 2z = -2x.$$

Con $p(x) = -2$, un factor integrante es

$$I(x) = e^{\int (-2)dx} = e^{-2x}.$$

Al multiplicar por el factor integrante a la ecuación lineal, se tiene

$$\frac{d}{dx} (e^{-2x}z) = e^{-2x} \left(\frac{dz}{dx} - 2z \right) = -2xe^{-2x}.$$

Integrando ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned}e^{-2x} z &= x e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + C \\ z &= x + \frac{1}{2} + C e^{2x}.\end{aligned}$$

Al sustituir $z = y^{-2}$, obtenemos la solución general

$$\left(x + \frac{1}{2} + C e^{2x}\right) y^2 - 1 = 0.$$

Ejemplo 6.24 Resuelva la ecuación diferencial

$$(\cos x - y \operatorname{sen} x) dx - \frac{1}{y} dy = 0.$$

Solución.

Reescribiendo la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx} - y \cos x = -y^2 \operatorname{sen} 2x,$$

vemos que corresponde a una ecuación del tipo Bernoulli. Por lo que multiplicando por y^{-2} y luego haciendo el cambio de variable $z = y^{-1}$, resulta la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + (\cos x) z = \operatorname{sen}(2x).$$

Ahora, multiplicando ambos miembros por el factor integrante $I(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, escribimos

$$\frac{d}{dx} (ze^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} 2x} \operatorname{sen}(2x).$$

Luego, integrando se sigue que

$$ze^{\operatorname{sen} x} = 2e^{\operatorname{sen} x} (\operatorname{sen} x - 1) + C$$

osea,

$$y = \frac{1}{2\operatorname{sen} x - 2 + C e^{-\operatorname{sen} x}}.$$

Ejemplo 6.25 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + xy = x e^{-x^2} y^{-3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solución.

La ecuación dada es de tipo Bernoulli por lo que multiplicando por y^3 obtenemos

$$y^3 y' + xy^4 = xe^{-x^2}.$$

Con la sustitución $z = y^4$ y por tanto $\frac{dz}{dx} = 4 \left(y^{-3} \frac{dy}{dx} \right)$, resulta

$$\frac{dz}{dx} + 4xz = 4xe^{-x^2},$$

la cual ya es una ecuación lineal en z . En seguida, multiplicando con el factor integrante $I(x) = e^{\int 4x dx} = e^{2x^2}$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{2x^2} \frac{dz}{dx} + 4xz e^{2x^2} &= 4xe^{x^2} \\ \frac{d}{dx} (ze^{2x^2}) &= 4xe^{x^2}. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a x se obtiene

$$ze^{2x^2} = 2e^{x^2} + c.$$

De donde, al reemplazar $z = y^4$, obtenemos

$$y^4 - 2e^{-x^2} + ce^{-2x^2} = 0.$$

Usando la condición $y(0) = 1$, encontramos $c = 1$. Por tanto, la solución particular es

$$y^4 - 2e^{-x^2} + e^{-2x^2} = 0.$$

Ejemplo 6.26 *Resuelva la ecuación diferencial*

$$x^{-4/3} (xy + y^2 + 2y) dx - x^{-1/3} dy = 0$$

Solución.

Reescribiendo en la forma

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{2}{x} + 1 \right) y = \frac{1}{x} y^2$$

vemos que la ecuación es de tipo Bernoulli. Para encontrar la solución se sigue los siguientes pasos .

i) multiplicamos por y^{-2} para obtener

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - \left(\frac{2}{x} + 1 \right) y^{-1} = \frac{1}{x}$$

ii) la sustitución $z = y^{-1}$ y por consiguiente $\frac{dz}{dy} = - \left(y^{-2} \frac{dy}{dx} \right)$ nos conduce a una ecuación lineal en z .

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{2}{x} + 1 \right) z = -\frac{1}{x}$$

iii) multiplicando con el factor integrante $I(x) = e^{\int (\frac{2}{x} + 1) dx} = x^2 e^x$, resulta

$$x^2 e^x \left[\frac{dz}{dx} + \left(\frac{2}{x} + 1 \right) z \right] = -x e^x.$$

Lo que implica que

$$d(x^2 e^x z) = -x e^x dx.$$

De donde, al integrar se obtiene

$$x^2 e^x z = -(x - 1) e^x + C.$$

Finalmente, sustituyendo $z = y^{-1}$, tenemos la solución general

$$x^2 e^x y^{-1} + (x - 1) e^x - C = 0.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-5, resuelva la ecuación diferencial lineal dada, indicando el mayor intervalo I sobre la cual la solución general es definida.

1. $y' + (2/x)y = (\cos x)/x^2$

2. $xy' + 4y + x = x^3$

3. $xy' = x^2 \operatorname{sen} x + y$

4. $(x-2)^2 y' = 5 - 8y - 4xy$

5. $xy' - \frac{y}{x-1} - x = 0$

En los ejercicios 6-10, halle la solución particular de la ecuación diferencial lineal que satisface la condición inicial especificada.

6. $x^3 y' = e^{1/x^2} - 2y; y(1) = e$

7. $y' - \frac{y}{x} = xe^x, y(1) = e - 1$

8. $y' + y \tan x = \sec x + \cos x; y(0) = 1$

9. $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = x \operatorname{sen} x; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

10. $y' \sqrt{1-x^2} + y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x, y(0) = 0$

En los ejercicios 11-20, resuelva las ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

11. $(xy^3 + \ln x) dx - y^2 dy = 0$

12. $y' = x\sqrt{y} - \frac{y}{x}$

13. $2xy' - y = 10x^3 y^5$

14. $x^{-4/3} (xy + y^2 + 2y) dx - x^{-1/3} dy = 0$

15. $(y \ln x - 2) y dx - x dy = 0$

16. $\left(x - \frac{x^3 y}{2}\right) y' - y^4 = 0$

17. $y' - \frac{y}{3x} = y^4 \ln x$

$$18. (1 + x^2) y' = xy + x^2 y^2$$

$$19. y' = y \operatorname{sen} x - y^2 \cos 2x$$

$$20. y' = \frac{y}{x(2xy \ln y + y) - x}$$

6.7. Aplicaciones de EDO de primer orden

6.7.1. Trayectorias ortogonales

Las trayectorias ortogonales son un concepto importante en el campo de las ecuaciones diferenciales y la geometría. Se refieren a curvas que se cruzan en ángulos de 90 grados en cada punto de intersección.

Un ejemplo clásico son las familias de curvas descritas por las líneas equipotenciales y las líneas de campo eléctrico en la electrostática. En este caso, las líneas equipotenciales son trayectorias ortogonales a las líneas de campo eléctrico. En cada punto, el campo eléctrico es perpendicular a la línea equipotencial.

Definición 6.6 Cuando todas las curvas de una familia $G(x, y, c_1) = 0$ cortan ortogonalmente todas las curvas de otra familia $H(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre si. (Véase figura 6.2)

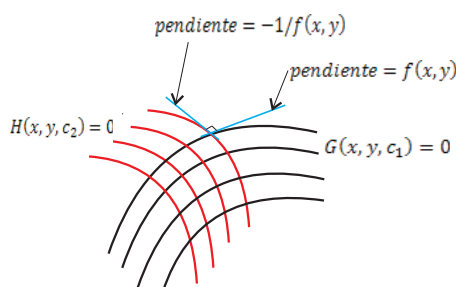


Figura 6.2:

Proposición 6.5 Si $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de una familia, la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales es $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$.

De esta manera, obtener las trayectorias ortogonales a una familia de curvas de las cuales se conoce su expresión analítica $G(x, y, c) = 0$, requiere los siguientes pasos:

1. Diferenciar la ecuación $G(x, y, c) = 0$.
2. Eliminar c del sistema formado por la ecuación y su derivada, para así obtener la ecuación diferencial de la familia.
3. Obtener la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales aplicando el resultado precedente.
4. Integrar la ecuación resultante.

Ejemplo 6.27 Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$x + y - ce^x + 1 = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Solución.

Al derivar ambos lados respecto de x , se tiene

$$y' = ce^x - 1.$$

Al reemplaza la constante $c = \frac{x + y + 1}{e^x}$, la cual se obtiene de la ecuación original de la familia de curvas, se obtiene la ecuación

$$y' = x + y.$$

Esto implica que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $dy/dx = -1/y'$, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x + y}.$$

Esta ecuación se resuelve haciendo $z = x + y$. Al derivar, respecto de x , se tiene $z' = 1 + y'$, o sea

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - 1}{z}.$$

Al separar las variables e integrar, resulta

$$\begin{aligned} \int \frac{z}{z-1} dz &= \int dx \\ z + \ln|z-1| &= x + C, \end{aligned}$$

o sea

$$x + y + \ln|x + y - 1| - x + C = 0$$

son las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada al principio.

Ejemplo 6.28 Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2, \quad c > 0.$$

Solución.

Los dos primeros pasos señalados al inicio de esta sección, puede abreviarse también al reescribir la ecuación dada en la forma

$$\frac{x^2 + y^2}{2x} = c$$

y en seguida derivar para obtener la ecuación diferencial libre de parámetros. Esto es,

$$\frac{2x(2x + 2yy') - 2(x^2 + y^2)}{4x^2} = 0.$$

De esta expresión se despeja y' , y se tiene

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Esto implica que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $dy/dx = -1/y'$, o sea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{y^2 - x^2}.$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver por diferentes métodos. Aquí, resulta más simple reescribirlo como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

y proceder con la sustitución $x = wy$. En efecto, $\frac{dx}{dy} = w + y \frac{dw}{dy}$ nos conduce a la ecuación diferencial separable

$$w + y \frac{dw}{dy} = \frac{w^2 - 1}{2w}.$$

Al separar las variables e integrar, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{2w}{w^2 + 1} dw &= - \int \frac{1}{y} dy \\ \ln(w^2 + 1) &= -\ln|y| + C. \end{aligned}$$

Finalmente, en términos de las variables x e y , se escribe como

$$\ln \left| \frac{x^2 + y^2}{y^2} \right| + \ln |y| = C.$$

Esta ecuación representa las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada al inicio.

Ejemplo 6.29 Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$x^2 = y^2 + cy^3, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Solución.

Reescribiendo la ecuación en la forma

$$c = \frac{x^2 - y^2}{y^3}$$

derivamos respecto a x para obtener

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$$

Esto implica que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $dy/dx = -1/y'$, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2}{2xy}$$

o equivalentemente

$$(3x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

La ecuación diferencial obtenida no es exacta, pues para $M = 3x^2 - y^2$ y $N = 2xy$ las derivadas respectivas son diferentes

$$\frac{\partial (3x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial (2xy)}{\partial x} = 2y$$

Sin embargo, desde que

$$f(x) = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = -\frac{2}{x}$$

el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando por este factor a la ecuación escrita en forma diferencial, se obtiene

$$\left(3 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0.$$

Esta ecuación ya es exacta, por lo que existe $F(x, y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{x}$. Entonces al integrar se tiene

$$F(x, y) = \int \frac{2y}{x} dy = \frac{y^2}{x^2} + \phi(x).$$

Por otro lado, el hecho que $\frac{\partial F}{\partial x} = 3 - \frac{y^2}{x^2}$, implica

$$-\frac{y^2}{x^2} + \phi'(x) = 3 - \frac{y^2}{x^2}$$

o sea $\phi'(x) = 3$ y por tanto $\phi(x) = 3x$. Así, $F(x, y) = \frac{y^2}{x^2} + 3x$ y las trayectorias ortogonales, a la familia de curvas dada al principio, es

$$F(x, y) = \frac{y^2}{x^2} + 3x = C.$$

Ejemplo 6.30 Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$\ln y - \ln(cx) - 4y = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

Solución.

Diferenciando implícitamente con respecto a x , se tiene

$$\frac{1}{y} y' - \frac{1}{x} - 4y' = 0$$

o sea

$$y' = \frac{y}{x(1 - 4y)}.$$

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $dy/dx = -1/y'$, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(4y - 1)}{y}.$$

Al separar las variables e integrar, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{4y - 1} dy &= \int x dx \\ \frac{1}{4} y + \frac{1}{16} \ln \left| y - \frac{1}{4} \right| &= \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-12, halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas.

1. $y = cx^2$
2. $y = \sqrt{4x^2 - cx}$
3. $x(c + 5 \ln x^2) - y = 0$
4. $y^2 = cx^3$
5. $x^2 + 9y^2 - \ln y^2 = c$
6. $(y^2 - x^2) = c(y - x)^{-2}$
7. $3y - \ln y^3 + \ln cx = 0$
8. $(x + 1)^2 = ce^{y^2 + 2x}$
9. $x - y = \sqrt[3]{c(x + y)}$
10. $y = \frac{9}{(x^2 + c^2)^{1/2}}$
11. $x^2 + y^2 = cy$
12. $(x - 1)^2 + y^2 = cx$

En los problemas 13-15, encuentre la familia de trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias.

13. con centro en el eje Y y tangentes al eje X .
14. con centro en la recta $x - 1 = 0$ y tangentes al eje X .
15. con centro en la recta $y - 1 = 0$ y tangentes al eje Y .

6.7.2. Crecimiento - Decaimiento

El problema de valor inicial

$$\frac{dX}{dt} = kX, \quad X(t_0) = X_0 \quad (6.17)$$

donde k es una constante de proporcionalidad ($k > 0$ o $k < 0$), sirve como modelo matemático para un amplio número de fenómenos que tienen que ver con el crecimiento o el decaimiento. Así por ejemplo, en las aplicaciones biológicas la razón de crecimiento de ciertas poblaciones (bacterias, pequeños animales) en cortos periodos es proporcional a la población presente al tiempo t . En física y química la ecuación (6.17) se ve en la forma de una reacción cuya rapidez, o velocidad, dX/dt es directamente proporcional a la cantidad X de sustancia que no se ha convertido al tiempo t . La descomposición, o decaimiento, de U-238 (uranio) por radiactividad en Th-234 (torio) es una reacción de este tipo de ecuaciones.

Nótese que la ecuación (6.17) es separable por lo que al separar las variables e integrar se obtiene la solución general

$$X(t) = Ce^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Si consideramos $X(0) = X_0$, se obtiene la solución particular

$$X(t) = X_0 e^{kt}.$$

En la figura 6.3, se muestra la gráfica de $X(t)$.

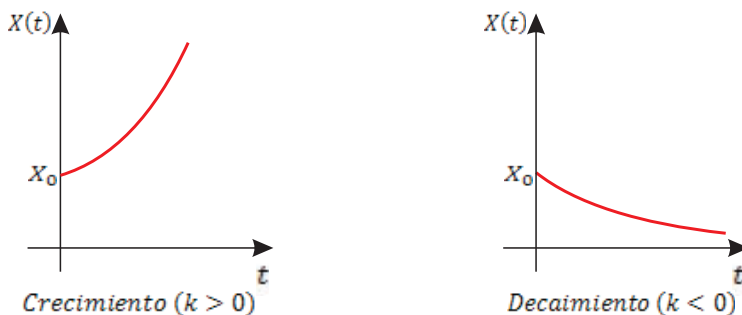


Figura 6.3:

Problema 1. Una comunidad en el norte del Perú tenía una población de 800 habitantes en el año 2010 y aumentó 120 en 10 años. Considerando que la tasa de crecimiento es constante, determine la cantidad de población que puede esperar el planificador de la comunidad para el año 2040?.

Solución.

Si $P(t)$ es la cantidad de habitantes en cualquier momento t y $P(0) = 800$ en el año 2010, el problema de valor inicial es:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP, & k > 0 \\ P(0) = 800 \end{cases},$$

La solución particular se obtiene inmediatamente, esto es,

$$P(t) = 800e^{kt}.$$

Al usar la condición, que en 10 años la población aumentó 120 o sea $P(10) = 920$, tenemos

$$\begin{aligned} 800e^{k(10)} &= 920 \\ e^k &= \left(\frac{23}{20}\right)^{1/10}. \end{aligned}$$

Reemplazando esta constante, la solución particular se escribe como

$$P(t) = 800 \left(\frac{23}{20}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

Así, para el año 2040 que corresponde $t = 30$, tenemos

$$P(30) = 800 \left(\frac{23}{20}\right)^3 \approx 1217 \text{ habitantes.}$$

Problema 2 La población de bacterias en un cultivo crece con una rapidez proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t . Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes; y espúes de 10 horas hay 2000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

Solución.

Sea $P(t)$ la población de bacteriano en cualquier momento t y $P(0) = P_0$ la cantidad inicial. Entonces del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP, & k > 0 \\ P(0) = P_0 \end{cases},$$

obtenemos

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Usando $P(3) = 400$, se tiene $400 = P_0 e^{3k}$ o sea $e^k = (400/P_0)^{1/3}$.

De $P(10) = 2000$, se sigue que

$$2000 = P_0 \left(\frac{400}{P_0} \right)^{10/3}.$$

Al resolver para P_0 , se obtiene la cantidad inicial de bacterias, esto es,

$$P_0 = \frac{(400)^{10/7}}{(2000)^{3/7}} \approx 201.$$

Problema 3 Un cultivo de bacterias tiene una cantidad inicial de 200 bacterias. A las 8 : 30 am. la cantidad de bacterias es 3200 y a las 11 : 30 am. del mismo día 12800. Si la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad presente, determine la hora cuando la cantidad inicial de bacterias se duplica.

Solución.

Sea $P(t)$ la cantidad de cultivo bacteriano en cualquier momento t (t en horas). Entonces del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP, & k > 0 \\ P(0) = 200 \end{cases},$$

obtenemos

$$P(t) = 200e^{kt}.$$

Supongamos que:

A las 8 : 30 corresponde $t = t_1$ y $P(t_1) = 3200$. Entonces

$$3200 = 200e^{kt_1}$$

A las 11 : 30 corresponde $t = t_1 + 3$ y $P(t_1 + 3) = 12800$. Entonces

$$64 = (e^k)^{(t_1+3)}$$

Al resolver el sistema

$$\begin{cases} 16 = e^{kt_1} \\ 64 = (e^k)^{(t_1+3)} \end{cases}$$

obtenemos $e^k = (16)^{1/6}$ y por tanto $t_1 = 6$. Así, podemos escribir

$$P(t) = 200(4)^{t/3}.$$

Ahora debemos hallar el tiempo $t = \tilde{t}$, en la cual $P(\tilde{t}) = 2(200)$. En efecto, de la ecuación

$$400 = 200(4)^{\tilde{t}/3}$$

se obtiene $\tilde{t} = 1.5$. Por tanto, la hora en la que se duplica la cantidad inicial de bacterias es a las 3 : 40 *am*.

Problema 4. El $Pb - 209$, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90 %?.

Nota: El período medio (o la vida media) de un material radiactivo se define como el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de su masa.

Solución.

Si $N(t)$ es la cantidad de plomo que queda en cualquier momento t y $N(0) = 1$, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = kN, & k < 0 \\ N(0) = 1 \end{cases},$$

tiene como solución

$$N(t) = e^{kt}.$$

Como el período medio de vida es 3,3 horas, entonces

$$\frac{1}{2}(1) = e^{3,3k},$$

o sea $e^k = (\frac{1}{2})^{1/(3,3)}$. Así,

$$N(t) = \frac{1}{2}e^{t/(3,3)}.$$

Ahora debemos determinar el tiempo t cuando $N(t) = 10\% (1)$, o sea

$$\frac{10}{100}(1) = \frac{1}{2}e^{t/(3,3)}.$$

Al resolver para t se obtiene

$$t = 3,3 \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 11 \text{ horas.}$$

Problema 5. La vida media del carbono catorce (C-14) radiactivo es aproximadamente de 5600 años. Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de C-14. Determine la edad del fósil.

Solución.

Si $M(t)$ la cantidad de carbono catorce en el instante t , entonces la velocidad de desintegración es directamente proporcional a su masa, es decir

$$\frac{dM}{dt} = kM, \quad k < 0$$

cuya solución es

$$M(t) = ce^{kt}.$$

Considerando que en $t = 0$, $M(0) = M_0$, tenemos $c = M_0$ y por consiguiente

$$M(t) = M_0 e^{kt}.$$

Puesto que la vida media del carbono catorce (C-14) verifica $M(5600) = M_0/2$, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{2} &= M_0 e^{k(5600)} \\ e^k &= (2)^{-1/5600} \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$M(t) = M_0 (2)^{\frac{-t}{5600}}.$$

Para determinar t en la cual $M(t) = \frac{M_0}{1000}$, se sigue el siguiente proceso

$$\begin{aligned}\frac{M_0}{1000} &= M_0 (2)^{\frac{-t}{5600}} \\ \ln\left(\frac{1}{1000}\right) &= \frac{t}{5600} \\ t &= \frac{5600 \ln\left(\frac{1}{1000}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \simeq 5580.4.\end{aligned}$$

Es decir, la edad del fósil es 5580.4 años aproximadamente.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La población de una comunidad crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial es 500 y aumenta el 20 % en 15 años . ¿Cuál será la población pasados 20 años?
2. La tasa de crecimiento de una población experimental de moscas de fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si había 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día, ¿Aproximadamente cuántas moscas habían inicialmente?
población?
3. Cuatro meses después de que se detenga la publicidad, una empresa de fabricación da cuenta de que sus ventas han bajado de 100000 unidades por mes a 80000 unidades por mes . Si las ventas siguen un patrón exponencial de decadencia, ¿qué van a ser después de otros 2 meses ?
4. Un cultivo tiene una cantidad inicial de P_0 de bacterias. Cuando $t = 1h$, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.
5. En cierto cultivo de bacterias, donde la tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias presentes, el número se triplica en 1 hora. Si al final de 4 horas se tienen 10 millones de bacterias, ¿cuántas bacterias se tuvieron inicialmente?

6. El número de bacterias en un cultivo está aumentando de acuerdo a la ley del crecimiento exponencial. Hay 125 bacterias en el cultivo después de 2 horas y 350 bacterias después de 4 horas.
 - a) Halle la población inicial.
 - b) Formule un modelo de crecimiento exponencial para la población de bacterias. Suponga que t representa tiempo en horas.
 - c) Use el modelo para determinar el número de bacterias después de 8 horas.
7. El Pb-209 isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3,3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 70 %?
8. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3 %. Si la rapidez de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t , determine la cantidad que queda después de 24 horas.
9. Suponga que el pentobarbital de sodio se usa para anestesiarse a un perro. Éste queda anestesiado cuando su torrente sanguíneo contiene al menos 45 miligramos (mg) de pentobarbital de sodio por kg de peso. Suponga también que esta sustancia se elimina exponencialmente del torrente sanguíneo del animal con una vida media de 5 h, ¿qué dosis se le debe administrar a un perro de 50 kg de peso para anestesiarse durante 1 h?
10. La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Suponga que un accidente nuclear ha dejado en cierta región un nivel de radiación de cobalto 100 veces por encima del nivel aceptable para ser habitada por seres humanos, ¿cuánto tiempo tendrá que pasar para que sea habitable nuevamente? (Ignorar la probable presencia de otros isótopos radiactivos.)

6.7.3. Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

Sir Isaac Newton encontró experimentalmente que la velocidad a la cual se enfria o se calienta un objeto en un medio ambiente es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio ambiente. Si $T = T(t)$ es la temperatura del objeto en cualquier instante $t > 0$ y T_m es la temperatura constante del medio ambiente, entonces la formulación del hecho experimental se puede enunciar como

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \quad (6.18)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Aquí $k > 0$, ya que la temperatura del objeto debe disminuir si $T > T_m$ o aumentar si $T < T_m$.

La solución general de la ecuación (6.18) es:

$$T(t) = T_m + ce^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Si $T(0) = T_0$, entonces $c = T_0 - T_m$. Por tanto, la solución particular es

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}, \quad k > 0. \quad (6.19)$$

Problema 1. Un aislador cerámico se hornea a 400°C y se enfría en una habitación en la que la temperatura es de 25°C . Después de 4 minutos, la temperatura del aislador es de 200°C . ¿Cuál es su temperatura después de 12 minutos?

Solución.

Aquí $T_0 = 400$ y $T_m = 25$, así que (6.19) se convierte en

$$T(t) = 25 + 375e^{-kt}.$$

Por otro lado, al usar la condición $T(4) = 200$ se obtiene

$$\begin{aligned} 200 &= 25 + 375e^{-4k} \\ e^{-k} &= \left(\frac{7}{15}\right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Al reemplazar esta constante, la solución para T se escribe

$$T(t) = 25 + 375\left(\frac{7}{15}\right)^{t/4}.$$

Por consiguiente, la temperatura del aislador despues de 12 minutos es

$$T(12) = 25 + 375 \left(\frac{7}{15} \right)^3 \approx 63^\circ C.$$

Problema 2. Un objeto con una temperatura de $72^\circ F$ se coloca afuera, donde la temperatura es $-20^\circ F$. A las 10:58 horas la temperatura del objeto es de $60^\circ F$ y a las 11:00 horas del mismo dia su temperatura es de $50^\circ F$. ¿A qué hora se colocó el objeto afuera?

Solución.

Sea $T(t)$ la temperatura del objeto en cualquier momento t .

Por conveniencia eligimos que el origen $t = 0$ de la escala del tiempo sea 10:58 para que $T_0 = 60$.

Reemplazando los datos $T_0 = 60$ y $T_m = -20$, (6.19), se tiene

$$\begin{aligned} T(t) &= -20 + (60 - (-20)) e^{-kt} \\ &= -20 + 80e^{-kt}. \end{aligned}$$

Puesto que a las 11:00 corresponde $t = 2$, entonces $T(2) = 50$ implica que

$$\begin{aligned} 50 &= -20 + 80e^{-2k} \\ e^{-k} &= \left(\frac{7}{8} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Al reemplazar esta constante, la solución para T , puede escribirse

$$T(t) = -20 + 80 \left(\frac{7}{8} \right)^{t/2}.$$

Ahora debemos determinar el tiempo t en la cual $T(t) = 72$, es decir

$$72 = -20 + 80 \left(\frac{7}{8} \right)^{\tau/2}.$$

Al resolver para t , se tiene

$$t = 2 \frac{\ln(23/20)}{\ln(7/8)} \approx -2,09 \text{ mín.}$$

Por lo tanto, el objeto se colocó afuera unos 2 minutos antes de las 10 : 58, es decir a las 10 : 56 horas.

Problema 3. De un cuarto cuya temperatura es de $30^{\circ}C$; se extrae al exterior un termómetro; a los dos minutos el termómetro registra una temperatura de $25^{\circ}C$ y a los dos minutos más tarde registra $22^{\circ}C$: Determine la temperatura del exterior.

Solución.

Sea $T(t)$ la temperatura que registra el termómetro en cualquier momento t y T_m la temperatura del medio (exterior al cuarto). Entonces con $T(0) = 30^{\circ}C$, escribimos

$$T(t) = T_m + (30 - T_m)e^{-kt}, \quad k > 0.$$

Usando los datos, $T(2) = 25^{\circ}C$ y $T(4) = 22^{\circ}C$ tenemos

$$25 = T_m + (30 - T_m)e^{-2k}$$

y

$$22 = T_m + (30 - T_m)e^{-4k}.$$

De estas dos relaciones, se obtiene

$$\frac{(25 - T_m)^2}{30 - T_m} = 22 - T_m.$$

Al resolver para T_m se obtiene la temperatura del exterior $T_m = 17,5^{\circ}C$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es $70^{\circ}F$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es $10^{\circ}F$. Pasado $1/2$ minuto el termómetro indica $50^{\circ}F$. ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1$ mín? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15^{\circ}F$?
2. Un termómetro se lleva de una habitación hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es $-15^{\circ}C$. Después de 1 minuto, el termómetro indica $13^{\circ}C$ y después de 5 minutos indica $-1^{\circ}C$. ¿Cuál era la temperatura inicial de la habitación?
3. Si la temperatura de una tasa de café es $95^{\circ}C$ recién servida, y al minuto se enfrió a $88^{\circ}C$ en un cuarto que está a $20^{\circ}C$, ¿cuánto tiempo debe de transcurrir para que alcance los $65^{\circ}C$?

4. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20°C , se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90°C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98°C ?
5. Un recipiente con agua a 65°C se coloca a enfriar en el exterior de una habitación donde la temperatura es de 5°C . Al cabo de media hora, cuando la temperatura del agua es de 35°C , se introduce en el interior de la habitación donde la temperatura es de 20°C . Calcule cuánto tiempo ha de transcurrir para que la temperatura del agua sea de 25°C .

6.7.4. Mezclas

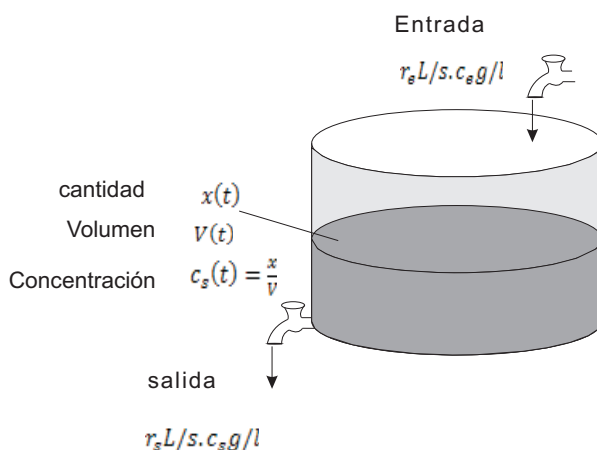


Figura 6.4:

Consideremos un tanque que contiene una solución, una mezcla de soluto y solvente, tal como sal disuelta en agua (figura 6.4). Existen tanto flujos de entrada como de salida, y se quiere calcular la cantidad $x(t)$ de soluto del tanque en el tiempo t , dada la cantidad $x(0) = x_0$ en tiempo $t = 0$. Supongamos que la sustancia, con una concentración de c_e de gramos de soluto por litro de solución, fluye dentro del tanque a una velocidad de r_e litros por segundo, y que la solución en el tanque permanece completamente mezclada por agitación fluye hacia afuera a una velocidad constante de r_s litros por segundo.

Para obtener una ecuación diferencial para $x(t)$, se estima el cambio Δx en x durante un breve intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. La cantidad de soluto que fluye dentro del tanque durante Δt segundos es $r_e c_e \Delta t$ gramos.

Por otro lado, la cantidad de soluto que fluye hacia afuera del tanque durante un mismo intervalo de tiempo depende de la concentración $c_s(t)$ de soluto presente en la solución en el tiempo t .

$$c_s(t) = \frac{x(t)}{V(t)},$$

donde $V(t) = V(0) + (r_e - r_s)t$, representa el volumen (no constante a menos que $r_e = r_s$) de solución en el tanque en el tiempo t . Entonces, el cambio Δx en x durante un breve intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, verifica

$$\begin{aligned}\Delta x &= \text{gramos de entrada} - \text{gramos de salida} \\ &\approx r_e c_e \Delta t - r_s c_s \Delta t.\end{aligned}$$

Al dividir entre Δt , escribimos

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r_e c_e - r_s c_s.$$

Ahora, si todas las funciones involucradas son continuas y $x(t)$ es derivable, entonces tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = r_e c_e - r_s \frac{x}{V} \quad (6.20)$$

Observación. Tener en cuenta las unidades g/L, lb/gal, masa/volumen para deducir la ecuación (6.20), aunque se puede recurrir a cualquier otro sistema de unidades consistente para medir la cantidad de soluto y el volumen de la solución.

Problema 1 Un depósito contiene 50 gal de salmuera en el que hay disueltas 75 libras de sal. A partir de un instante $t = 0$, comienza a fluir en él salmuera que contiene 3 libras de sal por galón, a un ritmo de 2 galones por minuto. simultáneamente, la mezcla (que se mantiene uniforme removiéndola) escapa del depósito al mismo ritmo. ¿Cuándo habrá 125 libras de sal disuelta en el depósito?

Solución.

Si $x(t)$ es la cantidad de libras de sal disueltas en el depósito en el instante $t \geq 0$, la concentración en ese momento es $c_s(t) = \frac{x(t)}{50}$ libras por galon. La rapides con que cambia $x(t)$ es

$$\frac{dx}{dt} = \text{entrada} - \text{salida} .$$

Como

$$\text{entrada} = r_e c_e = (2 \text{ gal/mín}) (3 \text{ lb/gal}) = 6 \text{ lb/mín}$$

y

$$\text{salida} = r_s c_s(t) = (2 \text{ gal/mín}) \left(\frac{x}{50} \text{ lb/gal} \right) = \frac{x}{25} \text{ lb/mín}$$

resulta

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{x}{25}$$

Separando variables e integrando vemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x-150} &= - \int \frac{1}{25} dt \\ \ln |x-150| &= -\frac{1}{25}t + C. \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$x(t) = 150 + Ce^{-t/25}.$$

Dado que $x = 75$ en $t = 0$, vemos que $C = -75$, y por tanto,

$$x(t) = 150 - 75e^{-t/25}.$$

Ahora se quiere determinar el tiempo t cuando $x(t) = 125$, es decir,

$$125 = 150 - 75e^{-t/25}.$$

Al resolver para t , se obtiene $t = 25 \ln 3$. Lo que implica que habrá 125 libras de sal disuelta en el depósito tras $t = 25 \ln 3 \approx 27,45$ minutos.

Problema 2. El tanque de 600 gal inicialmente contiene 300 gal de agua pura. Se abre un grifo sobre el tanque y una solución salina que contiene 1.5 lb de sal por galón de solución comienza a fluir hacia el tanque a razón de 3 gal/min. Simultáneamente, se abre un drenaje en el fondo del tanque que permite que la solución salga del tanque a una velocidad de 1 gal/min. ¿Cuál será el contenido de sal en el tanque en el momento preciso en que el volumen de solución en el tanque sea igual a la capacidad del tanque (600 gal)?

Solución.

Si $x(t)$ es la cantidad de libras de sal disueltas en el depósito en el instante $t \geq 0$, la concentración en ese momento es

$$c_s(t) = \frac{x(t)}{300 + (3-1)t}.$$

La rapidez con que cambia $x(t)$ es

$$\frac{dx}{dt} = \text{entrada} - \text{salida}.$$

Como

$$\text{entrada} = (3\text{gal}/\text{mín}) (1,5\text{lb}/\text{gal}) = 4,5\text{lib}/\text{mín}.$$

y

$$\text{salida} = (1\text{gal}/\text{mín}) \left(\frac{x(t)}{300 + (3-1)t} \right) \text{lb}/\text{gal} = \frac{x(t)}{300 + 2t} \text{lb}/\text{mín}$$

la ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9}{2} - \frac{x(t)}{300 + 2t}.$$

Esta ecuación es lineal, y por consiguiente la solución es

$$x(t) = 450 + 3t + \frac{C}{\sqrt{300 + 2t}}.$$

Por otro lado, el contenido inicial de sal en el tanque es cero, o sea $x(0) = 0$. Al reemplazar este dato hallamos $C = -4500\sqrt{3}$ y así, la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t es

$$x(t) = 450 + 3t - \frac{4500\sqrt{3}}{\sqrt{300 + 2t}}.$$

El tiempo en la cual el tanque está lleno, se obtiene de resolver la ecuación $300 + 2t = 600$, esto es $t = 150$ min. Por tanto, la cantidad de sal en el tanque es $x(150) \approx 582$ lb.

Problema 3. Considere que el lago Erie tiene un volumen de 650 km^3 de agua y que la tasa de flujo de entrada (del lago Huron) y la del flujo de salida (al lago Ontario) son ambas de 420 km^3 por año. Suponga que en el tiempo $t = 0$ (en años) la concentración de contaminantes del lago Erie —causada por la contaminación industrial en el pasado y que ahora ha cesado— es cinco veces mayor que la del lago Huron. Si el flujo hacia afuera está perfectamente mezclado con el agua del embalse, ¿cuánto tomará reducir la concentración de contaminantes en el lago Erie de tal manera que sea tres veces la del lago Huron?

Solución.

Según el enunciado, considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{r_e=650 \text{ km}^3/\text{año}} & & \xrightarrow{r_s=420 \text{ km}^3/\text{año}} & O \\ & & E & & \\ & & Vol = 480 \text{ km}^3 & & \end{array}$$

tenemos los datos:

$$V = 650 \text{ km}^3$$

$$r_e = r_s = r = 420 (\text{km}^3/\text{año})$$

$c_e = c$ (la concentración de contaminantes del lago Huron), y

$$x_0 = x(0) = 5cV.$$

y la pregunta es: ¿cuándo es $x(t) = 3cV$?

La ecuación diferencial que modela es:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \text{entrada} - \text{salida} \\ &= rc - \frac{r}{V}x \end{aligned}$$

o sea

$$\frac{dx}{dt} + \frac{r}{V}x = rc.$$

Vemos que la ecuación es lineal y por consiguiente la solución es

$$x(t) = cV + ke^{-rt/V}.$$

Usando la condición inicial $x(0) = 5cV$, se obtiene $k = 4cV$; y así la solución particular es

$$x(t) = cV + 4cVe^{-rt/V}.$$

Finalmente el tiempo t en la cual $x(t) = 3cV$, sigue de resolver para t de la ecuación

$$3cV = cV + 4cVe^{-rt/V}.$$

Esto es, $t = \frac{V}{r} \ln 2$; y por tanto al reemplazar los datos se tiene

$$t = (650/420) \ln 2 \approx 1.0727 \text{ años.}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 g de sal. Salmuera que tiene 1 g de sal por litro entra al tanque con una rapidez de 4L/min; la solución bien mezclada sale del tanque con la misma rapidez. Encuentre la cantidad $x(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque al tiempo t .
2. Un tanque contiene 1000 litros de una solución compuesta de 100 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura dentro del tanque a una razón de 5 l/s, y la mezcla que se conserva uniforme por agitación se bombea hacia afuera en la misma proporción. ¿Cuánto tiempo pasará para que quede solamente 10kg de sal en el tanque?
3. Considere un depósito con un volumen de 8 000 millones de pies cúbicos (ft^3) y una concentración de contaminantes inicial de 0.25 %. Se tiene una inyección diaria de 500 millones de (ft^3) de agua con una concentración de contaminantes de 0.05 % y una salida diaria de agua con iguales características perfectamente mezclada en el depósito. ¿Cuánto tomará reducir la concentración de contaminantes a 0.10 % en el depósito?
4. Un tanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. Salmuera, que contiene 1 lb de sal por gal entra al tanque a una razón de 2 gal/min, y la solución (perfectamente mezclada) sale del recipiente a razón de 3 gal/min; en estas condiciones, el tanque se vacía exactamente después de una 1 h.
(a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque después de t min. (b) ¿Cuál es la cantidad máxima de sal dentro del recipiente?
5. Una solución de ácido nítrico fluye a una velocidad constante de 6 L/min hacia un tanque grande que inicialmente contenía 200 L de una solución de ácido nítrico al 0,5 %. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y sale del tanque a razón de 8 L/min. Si la solución que ingresa al tanque es ácido nítrico al 20 %, determine el volumen de ácido nítrico en el tanque después de t min. ¿Cuándo llegará el porcentaje de ácido nítrico en el tanque al 10 %?

6.7.5. Modelo logístico

Alrededor de 1840, **P. F. Verhulst**, (1804-1849) matemático y biólogo belga, investigó modelos matemáticos para predecir la población humana en varios países. Una de las ecuaciones que estudió fue la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) \quad (6.21)$$

con $a > 0$ y $b > 0$. Esa ecuación se llamó **ecuación logística** y su solución se denomina **función logística**. La gráfica de una función logística es la **curva logística**.

Las curvas logísticas predicen con bastante exactitud el crecimiento de ciertos tipos de bacterias, protozoarios, pulgas de agua (*Dafnia*) y moscas de la fruta (*Drosófila*) en un espacio limitado.

Solución de la ecuación logística

Descomponiendo en fracciones parciales

$$\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a - bP} \right) dP = dt$$

y luego al integrar, obtenemos

$$P(t) = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}}.$$

Si consideramos la condición inicial $P(0) = P_0$, $P_0 \neq a/b$, se obtiene la constante $c_1 = \frac{P_0}{a - bP_0}$. Sustituyendo y efectuando las simplificaciones respectivas, la solución se escribe como

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}. \quad (6.22)$$

Nótese que $P(t) \rightarrow \frac{a}{b}$, cuando $t \rightarrow \infty$.

En la figura 6.5, se muestra las gráficas de $P(t)$.

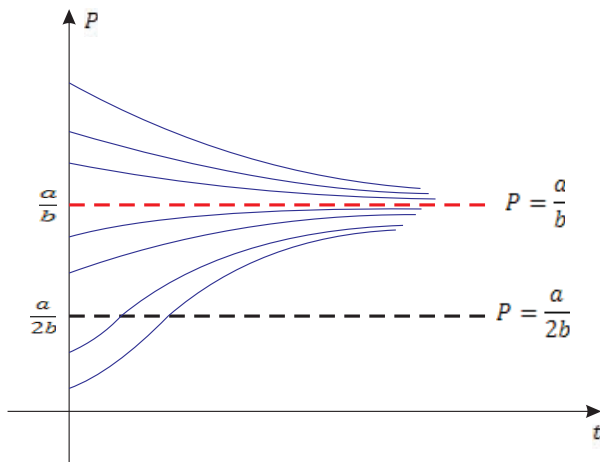


Figura 6.5:

Problema 1. Suponga que un alumno es portador del coronavirus (COVID-19) y regresa a su escuela, donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el coronavirus es proporcional no sólo a la cantidad x de alumnos infectados, sino también a la cantidad de alumnos no infectados, determine la cantidad de alumnos infectados siete días después, si se observa que a los cuatro días hay 50 alumnos contagiados.

Solución.

Sea $x(t)$ el número de alumnos infectados en cualquier momento t ; y suponga que nadie sale del campus durante la epidemia. Entonces, el problema de valor inicial es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx(1000 - x) \\ x(0) &= 1\end{aligned}$$

Identificando $a = 1000k$ y $b = k$ en la ecuación (6.22), la solución del problema de valor inicial es

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}.$$

Por otro lado, con la condición $x(4) = 50$ escribimos

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}.$$

Lo que implica que $-1000k = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{19}{999}\right) \approx -0,9906$. Así, al evaluar en $t = 7$, tenemos

$$\begin{aligned} x(7) &\approx \frac{1000}{1 + 999e^{-6,9342}} \\ &\approx 507. \end{aligned}$$

Es decir, después de siete días habrán 507 alumnos infectados aproximadamente.

Problema 2. Supongamos que comenzamos en el tiempo $t_0 = 0$ con una muestra de 1000 bacterias. Un día después vemos que la población se ha duplicado, y algún tiempo después notamos que la población se ha estabilizado en 100.000. Determine la población después de 5 días.

Solución.

Sea $P(t)$ la población de bacterias en cualquier momento t Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P(a - bP) \\ P(0) &= 1000 \end{aligned}$$

Considerando la solución.

$$P(t) = \frac{kP_0}{P_0 + (k - P_0)e^{-at}}, \quad k = \frac{a}{b}$$

Reemplazando $k = 100,000$ y luego usando la condición inicial $P(1) = 2000$, encontramos $a = \ln\left(\frac{99}{49}\right) \approx 0.7033$. Efectuando las simplificaciones respectivas, escribimos

$$P(t) = \frac{100}{1 + 99e^{-0.7033t}}.$$

Proyectamos que después de 5 días habrá $P(5) \approx 25.377$ bacterias.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Suponga que un estudiante portador de coronavirus (COVID-19), regresa a un campus universitario aislado, completando el número de estudiantes en 1000. Si la rapidez con que el COVID-19 se propaga es proporcional no solo al número de estudiantes contagiados, sino también, al número de estudiantes no contagiados; es decir si $x(t)$ denota el número de estudiantes contagiados en t días, la ecuación diferencial que modela el problema es dada por

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x).$$

Si en quinto día hay 100 estudiantes contagiados, determine el tiempo transcurrido para que el número de estudiantes contagiados sea 800.

2. La población $P(t)$ de una cierta comunidad satisface la ley logística

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(1 - \frac{P}{4000} \right)$$

donde el tiempo t se mide en años. Suponiendo que la población de esta comunidad es 1000 al inicio de 2020, determine la cantidad de población para el año 2030.

3. La cantidad $P(t)$ de personas en una comunidad bajo la influencia de determinado anuncio está gobernado por la ecuación logística. Inicialmente $P(0) = 500$ y se observa que $P(1) = 1000$. Determine $P(t)$ si se predice que habrá un límite de 50000 personas en la comunidad que verán el anuncio.
4. Una población, gobernado por la ecuación logística, comienza con 1000 bacterias, luego se duplica en 10 horas. Se observa que la población finalmente se estabiliza en 20000 bacterias. Encuentre el número de bacterias presentes después de 25 horas y el tiempo que tarda la población en alcanzar la mitad de su capacidad de carga.
5. Se observa que una población obedece a la ecuación logística con una población eventual de 20000. La población inicial es 1000, y 8 horas después, la población observada es 1200. Halle la tasa de reproducción y el tiempo necesario para que la población alcance el 75 % de su capacidad de carga.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Estos son especialmente importantes ya que muchas de las ecuaciones que surgen en la ciencia y la ingeniería son de segundo orden.

7.1. Preliminares

Definición 7.1 Una ecuación diferencial de segundo orden es una ecuación que involucra la variable independiente x y una función desconocida y junto con su primera y segunda derivada. Supondremos que es posible resolver para la segunda derivada, en cuyo caso la ecuación tiene la forma

$$y'' = f(x, y, y').$$

Una solución a tal ecuación es una función $y(x)$ diferenciable dos veces continuamente tal que

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)).$$

Muchos problemas de física dan lugar a modelos que son ecuaciones de segundo orden. Por ejemplo, en el estudio del movimiento, casi todos los modelos comienzan con la segunda ley de Newton,

$$F = ma.$$

Aquí estamos modelando el desplazamiento $y(t)$ de un cuerpo desde algún punto de referencia. La derivada de y es la velocidad v y la segunda derivada es la aceleración a . La fuerza F que actúa sobre el cuerpo suele ser una función del tiempo t , el desplazamiento y , y la velocidad v , o sea $F = F(t, y, v)$. Así, la segunda ley de Newton nos da la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F(t, y, dy/dx)$$

una ecuación de segundo orden.

Ecuaciones lineales

Estos tienen la forma especial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \quad (7.1)$$

Los coeficientes p , q y g pueden ser funciones arbitrarias de la variable independiente x , pero y , y' e y'' deben aparecer todas de primer grado. Esto significa que no permitimos que ocurran productos de estos, ni potencias mayores que 1, ni funciones complicadas como $\cos y'$, etc.

Así, la ecuación diferencial

$$y'' + (\sin x)y' + (2 + \sqrt{x})y = \tan^{-1} x$$

es lineal. En contraste, las ecuaciones

$$y'' + 2yy' = 0, \quad y \quad y'' - 5(y')^2 - 2y^3 = 0$$

son no lineales porque aparecen los productos y potencias de y y sus derivadas.

Ecuación lineal homogénea

Si la función $g(x) = 0$, se dice que la ecuación resultante es **homogénea**. Así la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (7.2)$$

se llamará la ecuación homogénea asociada a (7.1); en el caso contrario se denomina **no homogénea**.

Así por ejemplo, la ecuación de segundo orden

$$y'' - 5x^3y' + 2xy = \cos x$$

es no homogénea, su ecuación asociada homogénea es

$$y'' - 5x^3y' + 2xy = 0.$$

Existencia y unicidad

Los resultados de existencia y unicidad para las ecuaciones de segundo orden son muy similares a los de las ecuaciones de primer orden. Enunciaremos un resultado para ecuaciones lineales que será muy útil.

Teorema 7.1 *Suponga que las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo (a, b) y sea x_0 cualquier punto en (a, b) . Entonces, para cualquier número real y_0 e y_1 hay una y sólo una función $y(x)$ definida en (a, b) , que es una solución a*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad a < x < b$$

y satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$.

La principal diferencia entre este resultado y el teorema correspondiente para ecuaciones lineales de primer orden del capítulo 2 es que se necesita una condición inicial no solo para la función y , sino también para su derivada y' . Es importante notar que podemos estar seguros de que existe una solución y , además, que existe en todo el intervalo donde los coeficientes son definidos y continuos.

Proposición 7.2 *Supongamos que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (7.3)$$

Entonces la función

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad (7.4)$$

también es una solución de (7.3) para cualquier constante C_1 y C_2 .

Prueba.

Notemos que $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$ y $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''$. Por tanto, sustituyendo y un simple reordenamiento nos permite obtener

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

El tipo de expresión que aparece en la ecuación (7.4) aparecerá con frecuencia.

Definición 7.2 (Principio de superposición) *Una combinación lineal de las dos funciones u y v es cualquier función de la forma*

$$w = \alpha u + \beta v$$

donde α y β son constantes.

Así por ejemplo, la sustitución directa mostrará que $y_1(x) = e^{-x}$ y $y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal $y'' - 2y' - 3y = 0$. De acuerdo con la proposición 2, sabemos que cualquier combinación lineal $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ también es una solución.

Uno podría esperar que $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ sea la solución general. Este suele ser el caso, pero no siempre. Este será el contenido de nuestro teorema principal. Sin embargo, para expresarlo es necesario la siguiente.

Definición 7.3 (Independencia lineal de dos funciones) *Se dice que dos funciones u y v son **linealmente independientes** en el intervalo (a, b) si ninguna es un múltiplo constante de la otra en ese intervalo. Si uno es un múltiplo constante del otro en (a, b) se dice que son **linealmente dependientes**.*

Así, las funciones $u(x) = x$ y $v(x) = x^3$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. Es cierto que $v(x) = x^2 u(x)$, pero el factor x^2 no es una constante. Por otro lado, $u(x) = \cos x$ y $v(x) = 5 \cos x$ son obviamente linealmente dependientes en $\mathbb{R}$.

Vamos a usar el teorema 7.1 para demostrar el siguiente resultado, que nos proporcionará nuestra estrategia de solución para ecuaciones homogéneas.

Teorema 7.3 *Suponga que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (7.5)$$

Entonces la solución general de (7.5) es

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Observación: Por este resultado diremos que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (7.5) forman un **conjunto fundamental** de soluciones.

Para probar el teorema 7.3, necesitamos saber un poco más sobre el impacto de la independencia lineal. Para esto necesitamos definir el siguiente concepto.

Definición 7.4 (Wronskiano) *El **Wronskiano** de dos funciones u y v es definido como*

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix} = u(x)v'(x) - v(x)u'(x).$$

en donde las primas representan las derivadas.

La relación del Wronskiano con la independencia lineal se resume en las siguientes dos proposiciones.

Proposición 7.4 *Suponga que las funciones u y v son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en el intervalo (a, b) . Entonces, el wronskiano de u y v es idénticamente igual a cero en (a, b) o nunca es igual a cero allí.

Prueba.

Para probar este resultado, diferenciamos el wronskiano $W = u(x)v'(x) - v(x)u'(x)$ para obtener

$$W'(x) = u'v' + uv'' - v'u' - vu'' = uv'' - vu''$$

Como u y v son soluciones de $y'' + py' + qy = 0$, podemos reemplazar y resolver sus segundas derivadas y sustituir. Esto es,

$$\begin{aligned} W'(x) &= u(-pu' - qu) - v(-pu' - qu) \\ &= p(uv' - vu') \\ &= -pW. \end{aligned}$$

Esta es una ecuación de primer orden separable para W . Si x_0 es un punto en (a, b) , la solución es

$$W = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}, \quad a < x < b$$

Si $W(x_0) = 0$, entonces $W(x) = 0$ para $a < x < b$. Por otro lado, si $W(x_0) \neq 0$, entonces $W(x) \neq 0$, ya que el término exponencial nunca es cero.

Proposición 7.5 *Suponga que las funciones u y v son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{7.6}$$

en el intervalo (a, b) . Entonces u y v son linealmente dependientes si y sólo si su Wronskiano es idénticamente cero en (a, b) .

Prueba,

Suponga primero que u y v son linealmente dependientes en (a, b) . Entonces uno de ellos es múltiplo constante del otro, o sea $u = Cv$. Lo que implica que $u' = Cv'$ y por tanto

$$W = u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = Cv'(x)v'(x) - v(x)Cv'(x) = 0.$$

Por el contrario, suponga que $W(x) = 0$ para $a < x < b$. Queda por demostrar que u y v son linealmente dependientes. Primero, si $v(x) = 0$ para $a < x < b$, entonces $v = 0u$, por lo que u y v son linealmente dependientes. Supongamos, por tanto, que v no es idénticamente igual a 0 en (a, b) . Supongamos que $v(x) \neq 0$ para algún $x \in (a, b)$. Como v es continua, existe un intervalo $(c, d) \subset (a, b)$ que contiene x_1 en el que $v(x) \neq 0$. En este intervalo tenemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{-W}{v^2} = 0.$$

Por lo tanto, en el intervalo (c, d) , u/v es igual a una constante C , o $u = Cv$. En particular, en x_1 tenemos $u(x_1) = Cv(x_1)$ y $u'(x_1) = Cv'(x_1)$. Por la proposición 7.2 tanto u como Cv son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + py' + qy = 0$. Como tienen las mismas condiciones iniciales en x_1 , del teorema 7.1 se deduce que $u = Cv$ en todas partes en (a, b) . En consecuencia, u y v son linealmente dependientes.

Proposición 7.6 *Suponga que las funciones u y v son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en el intervalo (a, b) . Si $W(x_0) \neq 0$ para algunos x_0 en el intervalo (a, b) , entonces u y v son linealmente independientes en (a, b) . Por otro lado, si u y v son linealmente independientes en (a, b) , entonces $W(x)$ nunca desaparece en (a, b) .

Prueba.

Si $W(x_0) \neq 0$ para algunos x_0 en el intervalo (a, b) , entonces por la Proposición 5 u y v no pueden ser linealmente dependientes. Por tanto, son linealmente independientes.

Por otro lado, si u y v son linealmente independientes en (a, b) , entonces por la proposición 7.5 el Wronskiano no es idénticamente igual a 0. Por la proposición 7.4 nunca es igual a 0 en (a, b) .

Reformulemos los resultados de las Proposiciones 5 y 6 para resaltar los puntos que necesitaremos.

Proposición 7.7 *Suponga que las funciones u y v son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en el intervalo (a, b) . Si $W(x_0) \neq 0$ para algunos x_0 en el intervalo (a, b) , entonces u y v son linealmente independientes en (a, b) . Por otro lado, si u y

v son linealmente independientes en (a, b) , entonces $W(x)$ nunca desaparece en (a, b) .

Prueba.

Si $W(x_0) \neq 0$ para algunos x_0 en el intervalo (a, b) , entonces por la proposición 7.6, u y v no pueden ser linealmente dependientes. Por tanto, son linealmente independientes.

Por otro lado, si u y v son linealmente independientes en (a, b) , entonces por la proposición 7.6 el Wronskiano no es idénticamente igual a 0. En consecuencia por la Proposición 5 nunca es igual a 0 en (a, b) .

Ahora con estos resultados estamos listos para probar el teorema 3.

Prueba del teorema 7.3

Suponga que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, y suponga que $y(x)$ es cualquier solución. Necesitamos encontrar las constantes C_1 y C_2 tales que $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Sea x_0 cualquier punto en (a, b) Elegimos las constantes de modo que

$$\begin{aligned} y(x_0) &= C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0), & y \\ y'(x_0) &= C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Este sistema tiene solución siempre que el determinante

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sin embargo, este determinante será reconocido como el wronskiano W de y_1 y y_2 . Como y_1 y y_2 son linealmente independientes, por la proposición 7.7 se sigue que $W(x_0) \neq 0$. Por lo tanto, podemos encontrar C_1 y C_2 resolviendo (7.7).

Sabemos que y y $C_1y_1 + C_2y_2$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, y por (7.7) tienen las mismas condiciones iniciales en x_0 . Por la parte de unicidad del teorema 7.1, tenemos

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \quad \text{para } a < x < b.$$

Ejemplo 7.1 Las funciones $y_1 = e^{-3x}$ y $y_2 = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' + y' - 6 = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Como

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 5e^{-x} \neq 0$$

para todo valor real de x , las funciones y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones. En consecuencia,

$$y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo indicado.

7.2. Reducción de orden

Uno de los hechos importantes al estudiar las ecuaciones diferenciales lineales de **segundo orden** es que podemos formar una segunda solución, $y_2(x)$, de

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad (7.8)$$

en un intervalo I a partir de una solución $y_1(x)$ no trivial.

Supóngase que $y_1(x)$ es una solución conocida de (7.8) en I y que $y_1(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo. Si definimos $y = u(x)y_1(x)$, entonces

$$y' = u y_1' + y_1' u', \quad y'' = u y_1'' + 2y_1' u' + y_1 u''.$$

Sustituyendo en (7.8) tenemos:

$$y'' + p y' + q y = \underbrace{u(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_0 + y_1 u'' + (2y_1' + p y_1) u' = 0$$

Lo que implica que debe cumplir

$$y_1 u'' + (2y_1' + p y_1) u' = 0. \quad (7.9)$$

Luego, haciendo $w = u'$ en la ecuación (7.9) resulta una ecuación lineal separable

$$y_1 w' + (2y_1' + p y_1) w = 0$$

o sea

$$\frac{dw}{w} + 2 \frac{y_1'}{y_1} dx + p dx = 0.$$

Integrando, se sigue que

$$w y_1^2 = C_1 e^{-\int p dx}.$$

Al despejar w y luego sustituir por u' , se tiene

$$u' = \frac{C_1 e^{-\int p dx}}{y_1^2} + c_2$$

Una vez más integramos para obtener

$$u(x) = C_1 \int \left(\frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} + C_2 \right) dx$$

Si eligimos $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, vemos en $y = u(x) y_1(x)$ que una segunda solución de la ecuación es

$$y_2(x) = y_1(x) \int \left(\frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} \right) dx. \quad (7.10)$$

Ejemplo 7.2 La función $y = x^2$ es una solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$. Determine la solución general en el intervalo $(0, +\infty)$.

Solución.

Primero escribimos en la forma estandar

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{6}{x^2} y = 0.$$

Vemos que $p(x) = \frac{2}{x}$ y por tanto al reemplazar en la fórmula

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2 \int \left(\frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{x^4} \right) dx \\ &= -\frac{1}{5x^3}. \end{aligned}$$

La solución general en $(0, +\infty)$ está definida por $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, es decir,

$$y = C_1 x^2 - C_2 \frac{1}{5x^3}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-6, determine una segunda solución de la ecuación diferencial dada. Además indique un intervalo adecuado de validez de la solución.

1. $y'' + 2y' + y = 0$; $y_1 = xe^x$
2. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$, $y_1 = x^4$
3. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$; $y_1 = x + 1$
4. $4x^2y'' + y = 0$; $y_1 = x^{1/2} \ln x$
5. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$
6. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$; $y_1 = x^3 \ln x$

7.3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Son ecuaciones de la forma

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (7.11)$$

donde p y q son constantes. Esta es una clase de ecuaciones que podemos resolver fácilmente. Veamos.

La ecuación homogénea lineal, de primer orden análoga con coeficientes constantes es la ecuación

$$y' + py = 0.$$

Esta ecuación es separable y de fácil solución. Su solución general es

$$y(x) = Ce^{-px},$$

donde C es una constante arbitraria.

Motivados por el hecho de que la ecuación de primer orden tiene solución exponencial, Veamos si podemos encontrar una solución exponencial a la ecuación de segundo orden (7.11). Buscaremos una solución del tipo

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

donde λ es una constante, aún desconocida. Sustituyendo esta función y sus respectivas derivadas en la ecuación diferencial, obtenemos

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Desde que $e^{\lambda x} \neq 0$, tendremos solución a (7.11) si y sólo si

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (7.12)$$

Esto se llama la **ecuación característica** de la ecuación diferencial en (7.12). El polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ es llamado **polinomio característico** de la ecuación. Una raíz de la ecuación característica se llama **raíz característica**. Si λ es una raíz característica, entonces $y = e^{\lambda x}$ es una solución de la ecuación diferencial.

Dado que la ecuación característica es una ecuación cuadrática, sus raíces están dadas por la fórmula cuadrática

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Mirando el discriminante $p^2 - 4q$ vemos que hay tres casos a considerar:

1. dos raíces reales distintas si $p^2 - 4q > 0$
2. una raíz real repetida si $p^2 - 4q = 0$
3. dos raíces complejas distintas si $p^2 - 4q < 0$.

Veremos cada uno de estos en lo que sigue. Sabemos que si encontramos un conjunto fundamental de soluciones, entonces la solución general es la combinación lineal general de estas. Por lo tanto, necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes.

7.3.1. Raíces reales distintas

Si λ_1 y λ_2 son raíces reales distintas de la ecuación característica, entonces $y = e^{\lambda_1 x}$ y $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ son ambas soluciones. Como las raíces no son iguales, las soluciones no son múltiplos constantes entre sí. Por lo tanto, son linealmente independientes y por el Teorema 1.23 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.8 *Si la ecuación característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ tiene dos raíces reales distintas λ_1 y λ_2 entonces la solución general de $y'' + py' + qy = 0$ es*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

La solución particular para un problema de valor inicial se puede encontrar evaluando las constantes C_1 y C_2 usando las condiciones iniciales.

Ejemplo 7.3 *Resuelva el problema de valor inicial*

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Solución.

La ecuación característica asociada es

$$0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

con soluciones $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. De acuerdo a la proposición 8, la solución general es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

Para hallar las solución correspondiente a la condición inicial $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, derivamos la solución general

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

y luego sustituimos en $x = 0$ para obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2, \\ -1 &= 2C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Al resolver se obtiene $C_1 = -1$ y $C_2 = 3$. Por tanto la solución al problema de valor inicial es

$$y = -e^{2x} + 3e^x.$$

7.3.2. Raíces repetidas

Si se repiten las raíces de la ecuación característica (7.12), entonces se convierte en

$$0 = \lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)^2,$$

donde λ_1 es la raíz repetida. Por la fórmula cuadrática, se tiene

$$\lambda_1 = \left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right) / 2 = -p/2.$$

Este valor de λ da una solución a la ecuación diferencial, a saber $y = e^{\lambda_1 x} = e^{-px/2}$.

Para usar el Teorema 3, necesitamos encontrar otra solución que no sea un múltiplo constante de esta. En efecto, por lo argumentado en la sección, reducción de orden, una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = e^{\lambda_1 x} \int \frac{e^{2\lambda_1 x}}{e^{2\lambda_1 x}} dx = x e^{\lambda_1 x}.$$

Proposición 7.9 Si la ecuación característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ tiene una sola raíz doble λ_1 , entonces la solución general de $y'' + py' + qy = 0$ es

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 7.4 Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Solución,

La ecuación característica asociada es

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

con solución $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad dos. Por tanto, e^x y $x e^x$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial, y la solución general es

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Para hallar la solución correspondiente a la condición inicial $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, derivamos la solución general

$$y' = C_1 e^{2x} + C_2 (e^x + x e^x)$$

y luego sustituimos en $x = 0$ para obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) = C_1, \\ -1 &= y'(0) = C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Las soluciones son $C_1 = 2$ y $C_2 = -3$. Por tanto la solución al problema de valor inicial es

$$y = 2e^x - 3xe^x.$$

7.3.3. Raíces complejas

Si las raíces de la ecuación característica (7.12) son complejas, entonces, dado que los coeficientes del polinomio característico son reales, las raíces son conjugadas complejas. Tienen la forma $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib$. Las soluciones correspondientes son $y_1 = e^{(a+ib)x}$ y $y_2 = e^{(a-ib)x}$. Por tanto la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}.$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Por lo que usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es un número real, escribimos

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx) \quad \text{y} \quad e^{-ibx} = \cos(bx) - i \operatorname{sen}(bx)$$

Luego, al sumar y restar estas dos ecuaciones nos da

$$e^{ibx} + e^{-ibx} = 2 \cos(bx) \quad \text{y} \quad e^{ibx} - e^{-ibx} = 2i \operatorname{sen}(bx).$$

Como $y(x) = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}$ es una solución de la ecuación (7.11) para cualquier elección las constantes C_1 y C_2 , entonces si hacemos $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1, C_2 = -1$ obtenemos las soluciones

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x} = e^{ax} (e^{ibx} + e^{-ibx}) \\ &= 2e^{ax} \cos(bx) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x} = e^{ax} (e^{ibx} - e^{-ibx}) \\ &= 2ie^{ax} \operatorname{sen}(bx). \end{aligned}$$

Los dos últimos resultados demuestran que las funciones reales $e^{ax} \cos(bx)$ y $e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$ son soluciones de la ecuación (7.11) y son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \\ &= e^{ax} (C_1 \cos(bx) + C_2 \operatorname{sen}(bx)). \end{aligned}$$

Proposición 7.10 Si la ecuación característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ tiene dos raíces complejas conjugadas $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib$, entonces la solución general de $y'' + py' + qy = 0$ es

$$y(x) = e^{ax} (C_1 \cos(bx) + C_2 \operatorname{sen}(bx)),$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Ejemplo 7.5 Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Solución.

La ecuación característica asociada es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

con solución $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. La solución general correspondiente (con $a = -1$ y $b = 1$) es

$$y(x) = e^{-x} (C_1 x + C_2 \operatorname{sen} x).$$

Para hallar la solución correspondiente a la condición inicial $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$, derivamos la solución general

$$y' = -e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + e^{-x} (-C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x)$$

y luego sustituimos en $x = 0$ para obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) = C_1, \\ 3 &= y'(0) = -C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Las soluciones son $C_1 = 2$ y $C_2 = 5$. Por tanto la solución al problema de valor inicial es

$$y(x) = e^{-x} (2 \cos x + 5 \operatorname{sen} x).$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Las ecuaciones 1-8 tienen raíces características reales y diferentes. Encuentre la solución general de cada ecuación diferencial.

1. $y'' - y' - 2y = 0$
2. $2y'' - 3y' - 2y = 0$
3. $y'' + 5y' + 6y = 0$
4. $y'' + y' - 12y = 0$
5. $2y'' - y' - y = 0$
6. $6y'' + y' - y = 0$
7. $3y'' - 2y' - y = 0$

8. $6y'' + 5y' - 6y = 0$

Las ecuaciones 9-16 tienen raíces características reales repetidas. Encuentre la solución general de cada ecuación diferencial.

9. $y'' - 4y' + 4y = 0$

10. $y'' - 6y' + 9y = 0$

11. $4y'' + 4y' + y = 0$

12. $4y'' + 12y' + 9y = 0$

13. $16y'' + 8y' + y = 0$

14. $y'' + 4y' + 4y = 0$

15. $16y'' + 24y' + 9y = 0$

16. $y'' + 8y' + 16y = 0$

Las ecuaciones 17-21 tienen raíces características complejas. Encuentre la solución general de cada ecuación diferencial.

17. $y'' + 4y = 0$

18. $y'' + 4y' + 5y = 0$

19. $y'' + 2y' + 17y = 0$

20. $y'' - 2y' + 4y = 0$

21. $y'' + 2y' + 2y = 0$

Para las ecuaciones 22-25, encuentre la solución del problema de valor inicial.

22. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

23. $10y'' - y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

24. $y'' - 2y' - 17y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$

25. $y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

7.4. Ecuaciones lineales no homogéneas

Pasamos ahora a la solución de ecuaciones lineales no homogéneas. Estas son ecuaciones de la forma

$$y'' + py' + qy = f \quad (7.13)$$

donde $p = p(x)$, $q = q(x)$ y $f = f(x)$ son funciones de la variable independiente. Recuerde que f se llama término no homogéneo o término forzado.

Nuestra estrategia de solución proviene de la comprensión de la estructura de la solución general, que está contenida en el siguiente teorema.

Teorema 7.11 *Suponga que y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea (7.13), y que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada*

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (7.14)$$

Entonces la solución general de la ecuación no homogénea (7.13) viene dada por

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p \quad (7.15)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Observe que la solución general se puede escribir como $y = y_h + y_p$ donde $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Así, para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea (7.13) primero encontramos la solución general, y_h de la ecuación homogénea correspondiente (7.14). A continuación, encontramos una solución particular, y_p , para la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es entonces $y = y_h + y_p$.

Prueba.

Suponga que y es una solución de (7.13). Sabemos que y_p también es una solución, por lo que tenemos las dos ecuaciones

$$y'' + py' + qy = f$$

y

$$y_p'' + py_p' + qy_p = f.$$

Lo que implica que

$$(y - y_p)'' + p(y - y_p)' + q(y - y_p) = 0.$$

Por lo tanto, $y - y_p$ es una solución de la ecuación homogénea asociada (7.13). Como y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$y - y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

En consecuencia, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$, tal como se estableció en (7.15).

Para ecuaciones con coeficientes constantes, ya sabemos cómo resolver la ecuación homogénea, por lo que en esta sección nos concentraremos en encontrar una solución particular para la ecuación no homogénea.

7.4.1. Método de los coeficientes indeterminados

Estudiaremos la ecuación no homogénea

$$y'' + py' + qy = f \tag{7.16}$$

donde p y q son constantes y $f = f(x)$ es una función de la variable independiente. El método de coeficientes indeterminados solo funciona si los coeficientes son constantes. Las ecuaciones de segundo orden son las aplicaciones más importantes del método, pero el método funciona para ecuaciones de orden superior exactamente de la misma manera que lo hace para ecuaciones de segundo orden. Por simplicidad y conveniencia enfatizaremos el caso de segundo orden.

El método de los coeficientes indeterminados se basa en el hecho de que hay algunas situaciones en las que la forma del término forzado en (7.16) nos permite casi adivinar la forma de una solución particular. Veamos los siguientes ejemplos.

Nota: Si el término $f(x)$ tiene una forma que se replica bajo diferenciación, la idea es buscar una solución con la misma forma general que el término $f(x)$.

Término $f(x)$ es polinomial

La derivada de un polinomio es otro polinomio de menor grado. En consecuencia, si el término $f(x)$ es un polinomial de grado m , entonces es razonable intuir una solución particular

$$y_p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

que es también un polinomio de grado m , pero con sus coeficientes indeterminados.

Ejemplo 7.6 Encuéntrese una solución particular de $y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$.

Solución. Como $f(x) = 3x + 2$, supondremos que

$$y_p(x) = Ax + B$$

Remplazando las derivadas $y'_p = A$ y $y''_p = 0$, en la ecuación dada, tenemos:

$$0 + 3A + 4(Ax + B) = 3x + 2$$

$$4Ax + (3A + 4B) = 3x + 2$$

para todo x . Estableciendo $4A = 3$ y $3A + 4B = 2$, obtenemos $A = 3/4$ y $B = -1/16$. Por tanto,

$$y_p(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}.$$

Término $f(x)$ es trigonométrica

A continuación, considere un término $f(x)$ de la forma

$$f(x) = a \cos kx + b \operatorname{sen} kx$$

La derivada de $f(x)$ tiene la misma forma general, por lo que buscaremos soluciones de la forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$$

donde A y B son coeficientes aún no determinados.

Ejemplo 7.7 Encuentre una solución particular de $3y'' + y' - 2y = 2 \cos x$

Solución.

Una primer propuesta puede ser $y_p(x) = A \cos x$, pero la presencia de y en el lado izquierdo señala que probablemente se necesita un término que involucre también a $\operatorname{sen} x$. Por tanto, se intenta con

$$y_p(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

Así que la sustitución de y_p y sus derivadas dentro de la ecuación diferencial dada proporcionan

$$(-5A + B) \cos x + (-A - 5B) \operatorname{sen} x = 2 \cos x$$

Esto será cierto para toda x siempre que los términos seno y coseno en ambos lados de la ecuación coincidan

$$\begin{aligned} -5A + B &= 2 \\ -A - 5B &= 0 \end{aligned}$$

de donde, $A = -5/13$ y $B = 1/13$. Por tanto,

$$y_p(x) = -\frac{5}{13} \cos x + \frac{1}{13} B \operatorname{sen} x.$$

es una solución particular de la ecuación dada.

Término $f(x)$ es exponencial

Si $f(x) = ae^{ax}$, entonces el método se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.8 Encuentre una solución particular de $y'' - 4y = 2e^{3x}$.

Solución.

Cualquier derivada de e^{3x} es un múltiplo constante de e^{3x} , de tal manera que es razonable intentar que

$$y_p(x) = Ae^{3x}$$

Remplazando las derivadas $y_A'' = 9Ae^{3x}$ en la ecuación dada, tenemos

$$5Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

de donde, $A = 2/5$. Por tanto, $y_p(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ es una solución particular de la ecuación dada.

Casos excepcionales

El método de los coeficientes indeterminados parece sencillo. Sin embargo, hay algunos casos excepcionales a tener en cuenta tal como veremos en el siguiente ejemplo

Ejemplo 7.9 Encuentre una solución particular de $y'' - 4y = 2e^{2x}$.

Solución.

Si buscamos una solución de la forma indicada, $y(x) = Ae^{2x}$, nos encontramos con problemas. Para ver esto, sustituimos y y su derivada y'' en el lado izquierdo de la ecuación diferencial.

Lo que obtenemos es

$$y'' - 4y = 4Ae^{2x} - 4(Ae^{2x}) = 0.$$

Lo que implica que no hay elección posible de la constante A , que satisfaga $2e^{2x}$.

El problema surge porque el término $f(x)$, y por lo tanto la solución propuesta, es una solución a la ecuación homogénea asociada. Esta es la fuente de la dificultad en todos los casos excepcionales.

Qué hacemos?. En este caso buscamos una solución de la forma $y(x) = Axe^{2x}$. Multiplicamos la forma general habitual por x . Esta es la forma de encontrar una solución cuando la forma habitual no funciona. Si este método no funciona, multiplique por x una vez más y vuelva a intentarlo.

El método de los coeficientes indeterminados se puede utilizar siempre que el término $f(x)$ sea una combinación lineal de expresiones de las formas que ya hemos manejado. Esto es resultado de la linealidad de la ecuación diferencial.

Ejemplo 7.10 Halle las solución general de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10 \cos 3x.$$

Solución.

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Los términos involucrados en $f(x) = 3e^{-x} - 10 \cos 3x$ y en sus derivadas son e^{-x} , $\cos 3x$ y $\sen 3x$. Debido a que ninguno de éstos se encuentra en y_h , se intenta con

$$y_p = Ae^{-x} + B \cos 3x + C \sen 3x.$$

Después de sustituir y_p y sus derivadas respectivas, la solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13} \cos 3x + \frac{9}{13} \sen 3x$$

Luego la solución general es, $y = y_h + y_p$. Es decir,

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13} \cos 3x + \frac{9}{13} \sen 3x.$$

Enfoque general

Además de los tres casos que hemos considerado hasta ahora, podríamos tener términos $f(x)$ que son productos de dos de estos, o de los tres. La situación más general sería un término $f(x)$ de la forma

$$f(x) = e^{rx} P_n(x) \cos(\omega x) + e^{rx} Q_m(x) \operatorname{sen}(\omega x) \quad (7.17)$$

donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomiales de grado n y m . Nuevamente $f'(x)$ tiene la misma forma, por lo que podemos usar coeficientes indeterminados. En este caso, se busca soluciones de la forma

$$y_p(x) = x^s \left[(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k) e^{rx} \cos(\omega x) + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_k x^k) e^{rx} \operatorname{sen}(\omega x) \right] \quad (7.18)$$

donde $k = \max(m, n)$ y s es el entero no negativo más pequeño tal que no existe un término en y_p que duplique a un término en la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Posteriormente se determinan los coeficientes en (7.18) por sustitución de y_p en la ecuación no homogénea.

En la práctica, rara vez es necesario tratar con una función $f(x)$ que presente la forma general completa en (7.17). En la Tabla se muestra la forma de y_p en varios casos comunes, correspondientes a las posibilidades en que $k = 0$, $r = 0$ y $\omega = 0$.

$f(x)$	y_p
$P_k = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k$	$x^s (A_0 + A_1 x + \cdots + A_k x^k)$
$a \cos(\omega x) + b \operatorname{sen}(\omega x)$	$x^s (A \cos(\omega x) + B \operatorname{sen}(\omega x))$
$e^{rx} (a \cos(\omega x) + b \operatorname{sen}(\omega x))$	$x^s e^{rx} (A \cos(\omega x) + B \operatorname{sen}(\omega x))$
$P_k(x) e^{rx}$	$x^s (A_0 + A_1 x + \cdots + A_k x^k) e^{rx}$
$P_k(x) (a \cos(\omega x) + b \operatorname{sen}(\omega x))$	$x^s \left[(A_0 + A_1 x + \cdots + A_k x^k) \cos(\omega x) + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_k x^k) \operatorname{sen}(\omega x) \right]$

Ejemplo 7.11 Determine la forma apropiada para la solución particular de la ecuación

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos(2x).$$

Solución.

La ecuación característica $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ tiene raíces $\lambda = -3 \pm 2i$. Así, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_h(x) = e^{-3x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x))$$

Como un primer paso hacia la solución particular es

$$e^{-3x} (A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x))$$

pero, para eliminar la duplicación debe multiplicarse por x^s , con $s = 1$. De este modo, debe proponerse

$$y_p = e^{-3x} (Ax \cos(2x) + Bx \operatorname{sen}(2x)).$$

Ejemplo 7.12 Encuentre la forma apropiada para la solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + 2y = 5xe^x \cos x.$$

Solución.

La ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ tiene raíces $\lambda = 1 \pm i$. Así, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_h(x) = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$$

Como un primer paso hacia la solución particular

$$[(A_0 + A_1 x) e^x \cos x + (B_0 + B_1 x) e^x \operatorname{sen} x]$$

pero, para eliminar la duplicación debe multiplicarse por x . De este modo, debe proponerse

$$y_p = x [(A_0 + A_1 x) e^x \cos x + (B_0 + B_1 x) e^x \operatorname{sen} x].$$

El siguiente teorema describe el principio de superposición.

Teorema 7.12 (Principio de superposición) Supongamos que y_{p_f} es una solución de la ecuación lineal

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

y que y_{p_g} es una solución de

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

Entonces para cualquier constante k_1 y k_2 la función $y(x) = k_1 y_{p_f} + k_2 y_{p_g}$ es una solución de

$$y'' + py' + qy = f(x) + g(x).$$

Ejemplo 7.13 Halle la solución particular de

$$y'' - y' - 2y = e^{-2x} - 3e^{-x}. \quad (7.19)$$

Solución.

Nótese que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde $f_1(x) = e^{-2x}$ y $f_2 = -3e^{-x}$. Supongamos que descomponemos la ecuación y resolvemos las ecuaciones por separado para cada parte del término $f(x)$. Esto significa que encontramos funciones y_1 y y_2 tales que

$$\begin{aligned} y_1'' - y_1' - 2y_1 &= e^{-2x} \quad \text{y} \\ y_2'' - y_2' - 2y_2 &= -3e^{-x}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Como las ecuaciones son lineales, el teorema 12 dice que $y_1 + y_2$ será una solución de (7.19).

Queda por resolver las dos ecuaciones en (7.20). El primero se resuelve usando el método descrito anteriormente, esto es $y_1(x) = e^{-2x}/4$. En la segunda ecuación tenemos un caso excepcional, por lo que $y_2(x) = Axe^{-x}$. Remplazando las derivadas respectivas en la segunda ecuación se obtiene $A = 1$ y así $y_2(x) = xe^{-x}$. Por lo tanto, la solución particular de (7.19) es

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + xe^{-x}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-10, halle una solución particular y_p de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + 2y' + 2y = 2 + \cos(2x)$
2. $y'' - y' = x - e^{-x}$
3. $y'' + 25y = 2 + 3x + \cos(5x)$
4. $y'' + 2y' + y = 3 - e^{-x}$
5. $y'' + 4y' + 3y = \cos 2x + 3\operatorname{sen}(2x)$
6. $y'' + 2y' + 2y = 3\cos x - \operatorname{sen} x$
7. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + \operatorname{sen}(2x)$

$$8. \quad y'' - 3y' + 2y = xe^{-3x}$$

$$9. \quad y'' + 2y' + y = x^2e^{-2x}$$

$$10. \quad y'' + 3y' + 2y = x^2e^{2x}$$

En los ejercicios 11 y 12, halle una solución del problema de valor inicial

$$11. \quad y'' + 9y = 27, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 6$$

$$12. \quad y'' + y' - 12y = e^t + e^{2t} - 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

En los ejercicios 13-18, determine la forma de una solución particular para la ecuación diferencial. No resuelva.

$$13. \quad y'' + y = \operatorname{sen} x + x \cos x + 10^x$$

$$14. \quad y'' - y = e^{2t} + te^{2t} + t^2e^{2t}$$

$$15. \quad x'' - x' - 2x = e^t \cos t - t^2 \cos^3 t$$

$$16. \quad y'' + 5y' + 6y = \operatorname{sen} t - \cos(2t)$$

$$17. \quad y'' - 4y' + 5y = e^{5t} + t \operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)$$

$$18. \quad y'' - 4y' + 4y = t^2e^{2t} - e^{2t}$$

7.4.2. Método de Variación de parámetros

En esta sección presentamos una técnica llamada **variación de parámetros**¹. Esta técnica se utiliza para encontrar una solución particular de ecuaciones de orden superior más generales, siempre que conozcamos un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea asociada.

Estamos interesados en resolver la ecuación no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (7.21)$$

Asumiremos que hemos calculado un conjunto fundamental de soluciones y_1 y y_2 para la ecuación homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

¹El método de variación de parámetros fue inventado por Joseph Lagrange en 1774

Entonces la solución general asociada es

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

La idea detrás de la variación de parámetros es reemplazar las constantes C_1 y C_2 por funciones desconocidas $u_1(x)$ y $u_2(x)$ y buscar una solución particular a la ecuación no homogénea (7.21) de la forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2. \quad (7.22)$$

Calculando las derivadas de y_p ,

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1 y_1' + y_1 u_1' + u_2 y_2' + y_2 u_2', \\ y_p'' &= u_1 y_1'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2' + y_2 u_2'' + u_2' y_2' \end{aligned}$$

sustituimos y_p , y_p' y y_p'' en (7.21). Luego, agrupando los términos correspondientes, tenemos

$$\begin{aligned} y'' + p(x) y' + q(x) y &= u_1 [y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1] + u_2 [y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2] \\ &\quad + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + y_2 u_2'' + u_2' y_2' + p [y_1 u_1' + y_2 u_2'] + y_1' u_1' + y_2' u_2' \\ &= \frac{d}{dx} [y_1 u_1' + y_2 u_2'] + p [y_1 u_1' + y_2 u_2'] + y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{aligned}$$

Dado que buscamos determinar dos funciones desconocidas, u_1 y u_2 , es de esperar que necesitemos dos ecuaciones. Las podemos obtener si establecemos la hipótesis adicional de que las funciones u_1 y u_2 satisfacen $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$; y por consiguiente $y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x)$. Es decir, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{cases}$$

Aplicamos la regla de Cramer, obtenemos

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W} \quad (7.23)$$

en donde,

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2, & W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 f(x) \\ W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = y_1 f(x). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Se ve que el determinante W es el wronskiano de y_1 y y_2 . Sabemos que estos son linealmente independienetes y por tanto $W(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Las funciones u_1 y u_2 se determinan integrando, es decir,

$$u_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx, \quad u_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx$$

Cuando sustituimos en (7.22) obtenemos la solución particular que se quería.

Ejemplo 7.14 Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' + y = \tan x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Solución.

Es inmediato ver que la solución general de la ecuación homogénea asociada, es

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Reemplazando $y_1 = \cos x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \tan x$ en las relaciones (7.24), tenemos

$$W(x) = 1, \quad W_1 = -\sin x \tan x, \quad W_2 = \cos x \tan x.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int \frac{-\sin x \tan x}{1} dx = \operatorname{sen} x - \ln |\sec x + \tan x|, \\ u_2(x) &= \int \frac{\cos x \tan x}{1} dx = -\cos x. \end{aligned}$$

Así, una solución particular es

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos x \ln |\sec x + \tan x| \\ &= -\cos x \ln (\sec x + \tan x) \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación es

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln (\sec x + \tan x). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.15 Halle una solución particular, sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, para la ecuación

$$y'' + y = \tan x + x^2 - 3x.$$

Solución.

Con $f(x) = \tan x + x^2 - 3x$, el procedimiento de variación de parámetros nos conducirá a una solución. Pero en este caso es mas simple considerar separadamente las ecuaciones

$$\begin{aligned}y'' + y &= \tan x, \\y'' + y &= x^2 - 3x\end{aligned}$$

y luego usar el principio de superposición (Teorema 12). En efecto, en el ejemplo anterior encontramos que

$$y_{p1}(x) = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

es una solución particular de la primera ecuación. Para la segunda ecuación puede aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. Al buscar una solución particular de la forma $y_{p2}(x) = Ax^2 + Bx + C$ se obtiene

$$y_{p2} = x^2 - 3x - 2.$$

Finalmente, al aplicar el principio de superposición encontramos

$$\begin{aligned}y_p(x) &= y_{p1}(x) + y_{p2}(x) \\&= -\cos x \ln(\sec x + \tan x) + x^2 - 3x - 2\end{aligned}$$

como una solución particular para la ecuación dada.

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-12, aplique el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada. Además, indique el intervalo en que la solución general esté definida.

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + 4y = \tan(2x)$
3. $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x$
4. $y'' + 9y = \sec^2(3x)$
5. $y'' + 4y = \csc^2(2x)$

6. $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$

7. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$

8. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$

9. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

10. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2} \sqrt{1-x^2}$

11. $y'' + y = \tan t + e^{3t} - 1$

12. $y'' + y = 3 \sec t - t^2 + 1$

13. Si $y_1 = x^{-1/2} \cos x$ y $y_2 = x^{-1/2} \operatorname{sen} x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ en $(0, \infty)$, determine la solución general de

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}.$$

14. Si $y_1 = \cos(\ln x)$ y $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$ son soluciones conocidas, linealmente independientes de $x^2 y'' + xy' + y = 0$ en $(0, \infty)$, determine la solución general de

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln x).$$

15. Use el método de variación de parámetros para demostrar que

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + \int_0^t f(s) \operatorname{sen}(t-s) ds$$

es una solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = f(t),$$

donde $f(t)$ es una función continua sobre $(-\infty, \infty)$.

7.4.3. Ecuación de Cauchy-Euler

Toda ecuación diferencial de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \quad (7.25)$$

donde $x \in (0, \infty)$ y los coeficientes a , b y c son constantes tiene por nombre **Ecuación de Cauchy-Euler**.

Método de solución.

Intentaremos una solución de la forma $y = x^m$, donde m está por determinar. Reemplazando y , y' y y'' en la ecuación dada, se tiene

$$ax^2y'' + bxy' + cy = [am(m-1) + bmx + c]x^m$$

Así, $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial (7.25) siempre que m sea una solución de la **ecuación auxiliar**

$$am^2 + (b-a)m + c = 0. \quad (7.26)$$

Sobre las raíces de esta ecuación cuadrática hay tres casos distintos a considerar.

Caso 1. raíces reales y distintas.

Sean m_1 y m_2 raíces reales de (7.26), tales que $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por tanto, la solución general de (7.25) es

$$y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}.$$

Caso 2. raíces reales repetidas.

Si las raíces de (7.26) son repetidas, $m_1 = m_2$, entonces la solución general es

$$y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1} \ln x.$$

Caso 3. raíces complejas conjugadas.

Si $m_1 = \alpha + i\beta$, y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y β son reales, entonces

$$y(x) = c_1x^{\alpha+i\beta} + c_2x^{\alpha-i\beta}.$$

Cuando las raíces son complejas conviene formular la solución en términos de funciones reales. Por fórmula de Euler, escribimos

$$\begin{aligned} x^{i\beta} &= \left(e^{\ln x}\right)^{i\beta} = e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x) \\ x^{-i\beta} &= \left(e^{\ln x}\right)^{-i\beta} = e^{-i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x) \end{aligned}$$

Sumando y restando estas dos ecuaciones se deduce que la solución general de la ecuación diferencial (7.25) es

$$y(x) = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)].$$

Ejemplo 7.16 Resuelva $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 0$, $x > 0$.

Solución.

Insertando $y = x^m$ se obtiene, de acuerdo a (7.26),

$$3m^2 + 8m - 3 = 0,$$

cuyas raíces $m_1 = 1/3$ y $m_2 = -3$ producen dos soluciones independientes

$$y_1(x) = x^{1/3}, \quad y_2(x) = x^{-3} \quad \text{para } x > 0.$$

Luego, la solución general es

$$y(x) = c_1 x^{1/3} + c_2 x^{-3}.$$

Ejemplo 7.17 Resuelva $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $x > 0$.

Solución.

Sustituyendo $y = x^m$ se obtiene, de acuerdo a (7.26),

$$m^2 + 4m + 4 = 0,$$

cuya raíz $m = -2$ de multiplicidad dos producen la solución general

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x.$$

Ejemplo 7.18 Resuelva $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, $x > 0$.

Solución.

Sustituyendo $y = x^m$ se obtiene, de acuerdo a (7.26),

$$m^2 - 2m + 2 = 0,$$

cuyas raíces $m_1 = 1 + i$, y $m_2 = 1 - i$ producen la solución general

$$y(x) = x [c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)].$$

El siguiente ejemplo ilustra el caso no homogéneo.

Ejemplo 7.19 (Método de Variación de parámetros) *Resuelva la ecuación*

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x, \quad x > 0.$$

Solución.

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada. Insertando $y = x^m$ se obtiene, de acuerdo a (7.26),

$$\begin{aligned} m^2 - 4m + 3 &= 0 \\ m(m-1) - 3m + 3 &= 0 \quad \text{o sea} \quad (m-1)(m-3) = 0 \end{aligned}$$

cuyas raíces $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$ produce la solución general

$$y_h = c_1 x + c_2 x^3.$$

Antes de emplear variación de parámetros para encontrar $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, escribimos la ecuación diferencial dada en la forma estandar

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 2x^2 e^x,$$

e identificamos $f(x) = 2x^2 e^x$. Entonces con $y_1 = x$ y $y_2 = x^3$ obtenemos fácilmente

$$W = 2x^3, \quad W_1 = -2x^5 e^x, \quad W_2 = 2x^3 e^x.$$

Lo que implica que

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W} dx = \int -x^2 e^x dx = -x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x, \quad u_2 = \int \frac{W_2}{W} dx = e^x$$

Por tanto, $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ es

$$y_p = (-x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x) x + e^x x^3.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial dada es

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1 x + c_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2x e^x. \end{aligned}$$

Reducción a coeficientes constantes

Cualquier ecuación de Cauchy-Euler siempre se puede escribir como una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes haciendo $x = e^t$. La idea consiste en resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable t usando los métodos de las secciones anteriores, y al final restituir $t = \ln x$.

Ejemplo 7.20 Resuelva $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \ln x$.

Solución.

Sustituyendo $x = e^t$ o $t = \ln x$, se tiene por regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}.$$

Por regla del producto y regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial dada y simplificando se obtiene

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = t.$$

Notemos que esta ecuación tiene coeficientes constantes, y su ecuación auxiliar asociada a la parte homogénea es $(m-2)(m-1) = 0$. Por lo que

$$y_h(x) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Ahora, por el método de los coeficientes indeterminados se prueba una solución particular de la forma $y_p = At + B$. Esto conduce a $2B - 3A + 2At = t$, de donde $A = 1/2$ y $B = 3/4$. Por tanto,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por último, al reemplazar $x = e^t$ y $t = \ln x$ la solución general de la ecuación diferencial original sobre el intervalo $(0, \infty)$ es

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} \ln x + \frac{3}{4}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

2. $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

3. $x^3y''' + xy' - y = 0$

4. $xy^{(4)} + 6y''' = 0$

Resuelva el problema de valores iniciales

5. $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = -5.$

6. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0, \quad y(2) = 32 \quad y'(2) = 0$

Resuelva la ecuación diferencial dada por variación de parámetros

7. $xy'' - 4y' = x^4$

8. $x^2y'' + xy' + y = 2x$

9. $x^2y'' + xy' - y = \ln x$

10. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$

11. $x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1}$

Use la sustitución $x = e^t$ para resolver las siguientes ecuaciones

12. $x^2y'' + 10xy' + 8y = 3x^2$

13. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 2 + 5x$

14. $x^2y'' + 9xy' - 20y = 4x^{-3}$

15. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$

7.5. Ecuaciones no lineales

Algunas ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden $F(x, y', y'') = 0$ donde falta la variable dependiente y , y $F(y, y', y'') = 0$ donde falta la variable independiente x , a veces se resuelven usando métodos de primer orden mediante la sustitución $u = y'$.

Ejemplo 7.21 Resuelva $y'' = 8x(y')^2$.

Solución.

Sea $u = y'$. Entonces al sustituir $\frac{du}{dx} = y''$ en la ecuación dada, resulta una ecuación de primer orden con variables separables, esto es,

$$\frac{du}{dx} = 8xu^2.$$

Luego, al separar las variables e integrar obtenemos

$$\begin{aligned} \int u^{-2} du &= 8 \int x dx \\ -\frac{1}{u} &= 4x^2 + c_1^2. \end{aligned}$$

Como $u^{-1} = 1/y'$, escribimos

$$y' = -\frac{1}{4x^2 + c_1^2}.$$

Al integrar se obtiene

$$\begin{aligned} y &= -\int \frac{1}{4x^2 + c_1^2} dx \\ &= -\frac{1}{2c_1} \arctan\left(\frac{2x}{c_1}\right) + c_2. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.22 Resuelva $yy'' = (y')^2$.

Solución.

En este caso como falta la variable independiente x , haciendo $u = y'$ y de la regla de la cadena

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$$

tenemos

$$y \left(u \frac{du}{dy} \right) = u^2.$$

Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u} du &= \int \frac{dy}{y} \\ \ln |u| &= \ln |y| + c_1, \end{aligned}$$

o sea $u = c_2 y$. Luego, restituyendo escribimos

$$y' = c_2 y.$$

De donde al separar las variables e integrar obtenemos

$$\ln |y| = c_2 x + c_3.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-8, resuelva la ecuación diferencial usando la sustitución $u = y'$.

1. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

2. $x^2 y'' + (y')^2 = 0$

3. $(y + 1) y'' = (y')^2$

4. $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$

5. $y'' + 2y (y')^3 = 0$

6. $y^2 y'' = y'$

7. $y'' + 4y' = e^{-2x}$

8. $yy'' + (y^2 - y') y' = 0$

En los ejercicios 9-10, resuelva el problema de valor inicial dada.

9. $2y'y'' = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

10. $y'' + x(y')^2 = 0$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 2$.

7.6. Algunas aplicaciones de EDO de segundo orden

7.6.1. Cuerpos en caída libre

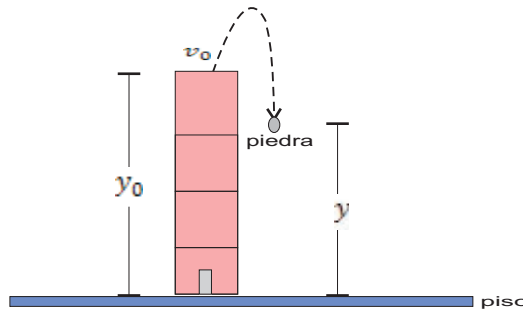


Figura 7.1:

Supongamos que se arroja una piedra hacia arriba, desde la azotea de un edificio. ¿Cuál es su posición en el momento t ? Como se ve en la figura 1.12, consideremos que su posición respecto al suelo es $y(t)$. Su derivada $v = y'(t)$ es la velocidad, y su segunda derivada $a = v' = y''$ es la aceleración. Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva, que la masa de la piedra es m y que no hay otra fuerza, además de la gravedad (g), actuando sobre la piedra, la segunda ley de Newton establece que

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g, \quad (7.27)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y mg es el peso de la piedra. Si la altura del edificio es y_0 y la velocidad inicial de la piedra es v_0 , y queda determinada mediante el problema de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0; \quad (7.28)$$

cuya solución es

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} (-g) t^2. \quad (7.29)$$

Por otro lado, desde que la aceleración es constante, se tiene

$$v = v_0 + at \quad (7.30)$$

o equivalentemente

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad (7.31)$$

Al sustituir (7.31) en (7.29) se obtiene

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0). \quad (7.32)$$

Ejemplo 7.23 *Imagine que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota sale de la mano, en un punto a la altura del barandal de la azotea, con rapidez ascendente de 15.0 m/s, quedando luego en caída libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. En este lugar, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Obtenga*

- la posición y velocidad de la pelota 1.00 s y 4.00 s después de soltarla;
- la velocidad cuando la pelota está 5.00 m sobre el barandal;
- la altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza; y
- la aceleración de la pelota en su altura máxima.

Solución.

Sea el origen el barandal, donde la pelota sale de la mano, y sea la dirección positiva hacia arriba. La posición inicial $y_0 = 0$, la velocidad inicial $v_0 = 15 \text{ m/s}$ y la aceleración es $a = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$.

a) La posición y y la velocidad v , en cualquier instante t una vez que se suelta la pelota están dadas por las ecuaciones (7.29) y (7.30), es decir,

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} (-g) t^2 \\ &= 0 + (15.0 \text{ m/s}) + \frac{1}{2} (-9.80 \text{ m/s}^2) t^2. \\ v &= v_0 + a t = v_0 + (-g) t \\ &= 15.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2) t. \end{aligned}$$

Cuando $t = 1.00 \text{ s}$, estas ecuaciones dan

$$y = +10.1 \text{ m} \quad v = +5.2 \text{ m/s}$$

La pelota está 10.1 m sobre el origen (y es positiva) y se mueve hacia arriba (v es positiva) con rapidez de 5.2 m/s, menor que la rapidez inicial porque la pelota frena mientras asciende.

Cuando $t = 4.00 \text{ s}$, las ecuaciones para y y v en función del tiempo t dan

$$y(t) = -18.4 \text{ m} \quad v = -24.2 \text{ m/s}$$

La pelota pasó su punto más alto y está 18.4 m debajo del origen (y es negativa); tiene velocidad hacia abajo (v es negativa) de magnitud 24.2 m/s. Conforme sube, la pelota pierde rapidez, luego la gana al descender; se mueve

a la rapidez inicial de 15.0 m/s cuando pasa hacia abajo por su punto de lanzamiento (el origen) y continúa ganando rapidez conforme desciende por debajo de este punto.

b) La velocidad v en cualquier posición y está dada por la ecuación (7.32)

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2(-g)(y - 0) \\ &= (15.0 \text{ m/s}^2) + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)y \end{aligned}$$

Con la pelota a 5.00 m sobre el origen, $y = +5.00 \text{ m}$, así que

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2(-g)(y - 0) \\ &= (15.0 \text{ m/s}^2) + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m}) \\ v &= \pm 11.3 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Obtenemos dos valores de v , pues la pelota pasa dos veces por el punto $y = 5.00 \text{ m}$, una subiendo con v positiva y otra bajando con v negativa.

c) En el instante en que la pelota llega al punto más alto, está momentáneamente en reposo y $v = 0$. La altura máxima y_1 puede obtenerse de (7.32) al sustituir $v = 0$, $y_0 = 0$ y $a = -g$

$$\begin{aligned} 0 &= v_0^2 + 2(-g)(y_1 - 0) \\ y_1 &= \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{15.0 \text{ m/s}^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = +11.5 \text{ m}. \end{aligned}$$

d) De hecho, en el punto más alto la aceleración sigue siendo $a = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$, la misma que cuando está subiendo y cuando está bajando. Por ello, la velocidad de la pelota está cambiando continuamente, de valores positivos a valores negativos, pasando por cero.

7.6.2. Cuerpos en caída y resistencia del aire



Figura 7.2:

Supongamos ahora, que un cuerpo de masa m que cae se encuentra con una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea, v . En este caso, si consideramos que la dirección positiva es hacia abajo, la fuerza neta que actúa sobre la masa es $F = F_1 + F_2 = mg - kv$, donde el peso $F_1 = mg$, del cuerpo es una fuerza que actúa en dirección positiva y la resistencia del aire $F_2 = -kv$ es una fuerza, que se llama de **amortiguamiento viscoso**, que actúa en dirección contraria o hacia arriba. Puesto que v se relaciona con la aceleración a mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton se enuncia como $F = ma = m dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley, obtenemos una ecuación diferencial de la velocidad del cuerpo en cualquier momento:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad \text{o} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \quad (7.33)$$

donde k es una constante de proporcionalidad positiva.

Note que la ecuación (7.33) es separable. Al separar las variables e integrar se obtiene

$$v(t) = \frac{mg}{k} - ce^{-\frac{k}{m}t}. \quad (7.34)$$

Si consideramos la condición inicial $v(0) = v_0$, entonces $c = \frac{mg}{k} - v_0$. Por tanto,

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (7.35)$$

Si $y(t)$ es la distancia que el cuerpo ha caído en el tiempo t desde su punto inicial o de liberación, entonces $v = dy/dt$ y $a = dv/dt = d^2y/dt^2$. Entonces en términos de y , la ecuación (7.33) es una ecuación diferencial de segundo orden

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} = mg. \quad (7.36)$$

Si consideramos las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$, entonces la solución del problema de valor inicial es la función de desplazamiento

$$y(t) = y_0 + \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} - v_0 \right) \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) \quad (7.37)$$

Ejemplo 7.24 *Supóngase que dejas caer un ladrillo desde lo alto de un edificio de 250 m de altura. El ladrillo tiene una masa de 2 kg y la fuerza de resistencia está dada por $F_2 = -4v$. ¿Cuánto tardará el ladrillo en llegar al suelo? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?*

Solución.

Reemplazando los datos $y_0 = 250$, $v_0 = 0$, $m = 2$, $g = 9.8$ y $k = 4$ la ecuación (7.37) se convierte en

$$y(t) = 4,9 \left(\frac{1}{2} e^{-2t} + t \right) + 247.55$$

Queremos encontrar t tal que $y(t) = 0$. Esta ecuación no se puede resolver usando álgebra, pero una calculadora manual o una computadora pueden encontrar una solución aproximada muy precisa. De esta forma obtenemos $t = 51.5204$ segundos.

Durante un tiempo así de grande, el término exponencial en (7.35) es despreciable, por lo que el ladrillo ha alcanzado su velocidad terminal de $v_{term} = 4.9$ m/s.

7.6.3. Sistemas de resorte y masa

Movimiento libre no amortiguado

Suponga que un resorte se suspende verticalmente de un soporte rígido y luego se le fija una masa m a su extremo libre. (Véase figura 7.3)

Por la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de elongación y proporcional a la cantidad de elongación s y es expresada en forma simple como

$$F = -ks, \quad k > 0$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad llamada constante de resorte.

Después de que se une una masa m a un resorte, ésta alarga el resorte una cantidad s y logra una posición de equilibrio en la cual su peso W se equilibra mediante la fuerza restauradora ks . Nótese que $W = mg$, donde la masa se mide

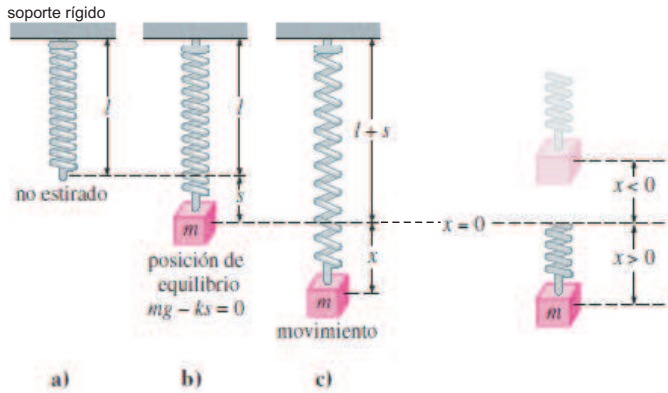


Figura 7.3:

en kilogramos o gramos y g es la aceleración debida a la gravedad ($9,8 \text{ m/s}^2$, o 980 cm/s^2).

Para construir un modelo matemático que describa el caso dinámico, empleamos la segunda ley del movimiento de newton: la fuerza neta o resultante de un cuerpo en movimiento de masa m , $\sum F_i = ma$, donde $a = d^2x/dt^2$ es su aceleración. Entonces,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + s) + mg = -kx \quad (7.38)$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (7.39)$$

donde $\omega^2 = k/m$. Se dice que la ecuación (7.39) describe el **movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado**.

La solución general de (7.39) se obtiene inmediatamente, esto es

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (7.40)$$

o equivalentemente $x(t)$ se escribe en una forma más simple como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (7.41)$$

donde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y ϕ es el ángulo de fase definido por

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{C_2}{A} \\ \cos \phi &= \frac{C_1}{A} \end{aligned} \implies \tan \phi = \frac{C_2}{C_1} \quad (7.42)$$

El **período** del movimiento descrito por (7.40) es $T = 2\pi/\omega$ y la **frecuencia** de movimiento es $f = 1/T$.

Dos condiciones iniciales obvias relacionadas con (7.39) son $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$, el desplazamiento inicial y la velocidad inicial de la masa, respectivamente.

Si $x_0 > 0$ y $x_1 < 0$, la masa parte de un punto abajo de la posición de equilibrio con una velocidad impartida hacia arriba.

Si $x_0 < 0$ y $x_1 = 0$, la masa se libera desde el reposo de un punto $|x_0|$ unidades arriba de la posición de equilibrio.

Ejemplo 7.25 *Una masa que pesa 9.8 N alarga 0.2 m un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está 0.25 m abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 0.4 m/s. Determine la ecuación de movimiento.*

Solución.

De $W = mg$ tenemos que $m = 1.0$ kg. También, de la ley de Hooke, $9.8 = k(0.2)$ implica que la constante de resorte es $k = 49$ N/m. Por lo que, la ecuación de valor inicial es:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + 49x &= 0 \\ x(0) &= 0.25 \text{ m}, \quad x'(0) = -0.4 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

Con $\omega^2 = 49$, o sea $\omega = 7$, rad/s la solución general es

$$x(t) = C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t.$$

Al aplicar las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se obtiene $C_1 = 0.25$ m y $C_2 = 0.057$ m. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = 0.25 \cos 7t - 0.057 \sin 7t$$

Ejemplo 7.26 *Un cuerpo con masa 1/2 kg está unido al extremo de un resorte estirado 2 m debido a una fuerza de 100 N y es puesto en movimiento a partir de la posición inicial $x_0 = 1$ m y velocidad inicial $v_0 = -5$ m/s. Encuéntrese la ecuación de movimiento del cuerpo, así como su amplitud, frecuencia, período de oscilación y ángulo de fase.*

Solución.

Tenemos $m = 1/2 \text{ kg}$ y también de la ley de Hooke, $k = \frac{100}{2} = 50 \text{ N/m}$. Entonces la ecuación de valor inicial es:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + 100x &= 0 \\ x(0) &= 1 \text{ m} \quad x'(0) = -5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Con $\omega^2 = 100$, o sea $\omega = 10 \text{ rad/s}$ la solución general es

$$x(t) = C_1 \cos 10t + C_2 \operatorname{sen} 10t.$$

Al aplicar las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se obtiene $C_1 = 1 \text{ m}$ y $C_2 = -1/2 \text{ m}$. Así, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \cos 10t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 10t$$

o equivalentemente

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{sen}(10t + \phi).$$

donde el ángulo de fase es $\phi = \pi + \arctan(-2) = 2.0344 \text{ rad}$ debido a que $\operatorname{sen} \phi > 0$ y $\cos \phi < 0$.

La amplitud de movimiento es $A = \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ m}$.

El período de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} \approx 0.6283 \text{ s}.$$

La frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = 1.5915 \text{ Hz}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

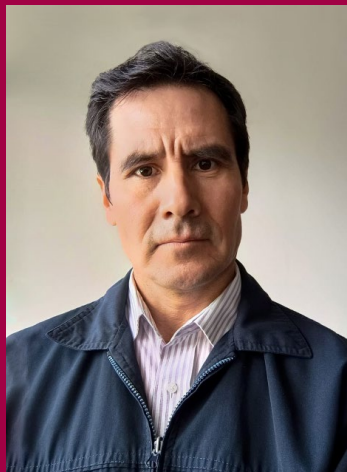
1. Se deja caer un ladrillo (rapidez inicial cero) desde la azotea de un edificio. El tabique choca contra el suelo en 2.50 s . Se puede despreciar la resistencia del aire, así que el ladrillo está en caída libre. a) ¿Qué altura (en m) tiene el edificio? b) ¿Qué magnitud tiene la velocidad del ladrillo justo antes de llegar al suelo?
2. Un estudiante lanza un globo lleno con agua, verticalmente hacia abajo desde la azotea de un edificio. El globo sale de su mano con una rapidez de 6.00 m/s . Puede despreciarse la resistencia del aire, así que el globo está en caída libre una vez soltado. a) ¿Qué rapidez tiene después de caer durante 2.00 s ? b) ¿Qué distancia cae en este lapso? c) ¿Qué magnitud tiene su velocidad después de caer 10.0 m ?
3. Se lanza un huevo casi verticalmente hacia arriba desde un punto cerca de la cornisa de un edificio alto; al bajar, apenas libra la cornisa y pasa por un punto 50.0 m bajo su punto de partida 5.00 s después de salir de la mano que lo lanzó. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez inicial tiene el huevo? b) ¿Qué altura alcanza sobre el punto de lanzamiento? c) ¿Qué magnitud tiene su velocidad en el punto más alto? d) ¿Qué magnitud y dirección tiene su aceleración en el punto más alto?
4. Un objeto que tiene una masa de 70 kg cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad. La velocidad terminal del objeto es 20 m/s . Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad.
 - (a) Encuentre la velocidad y la distancia recorrida al cabo de 2 segundos .
 - (b) ¿Cuánto tiempo le toma al objeto alcanzar el 80% de su velocidad terminal?
5. Una masa de 20 kilogramos se une a un resorte. Si la frecuencia del movimiento armónico simple es $2/\pi$ ciclos/s, ¿cuál es la constante de resorte k ? ¿Cuál es la frecuencia del movimiento armónico simple si la masa original se remplace con una masa de 80 kilogramos ?
6. Una masa que pesa 20 N alarga 6 m un resorte. La masa se libera al inicio desde el reposo en un punto 6 m abajo de la posición de equilibrio
 - a) Encuentre la posición de la masa en los tiempos $t = \pi/12, \pi/8, \pi/6, \pi/4$, y $9\pi/32\text{ s}$.

- b) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando $t = 3\pi/16$ s? ¿En qué dirección se dirige la masa en este instante.
7. Una fuerza de 400 newtons alarga 2 metros un resorte. Una masa de 50 kilogramos se une al extremo del resorte y se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 10 m/s. Encuentre la ecuación de movimiento.
8. Una masa que pesa 32 N alarga 2 m un resorte. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si la masa se libera inicialmente desde un punto situado 1 m arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 2 m/s. ¿Cuántos ciclos enteros habrá completado la masa al final de 4π segundos?

Bibliografía

- [1] Braun, M. (1978). *Differential Equations and Their Applications* (2 ed.). Springer-Verlag. USA.
- [2] Burden R., Faries J. y Douglas. (2012). *Análisis Numérico* (9 ed.). Ediciones OVA. México.
- [3] Chapra, S. C. y Canale R. P. (2015). *Métodos Numéricos para Ingenieros* (7 ed.). McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. DE C.V. México.
- [4] Edwards C. y Penney D. E. (2009). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* (4 ed.). Pearson Educacion. México.
- [5] Fulks, W. (1978). *Advanced Calculus* (3 ed.). John Wiley & Sons. New York.
- [6] Guardia, E. y Mendoza, A. (2018). *Cálculo Integral* (1 ed.). UNALM. Lima-Perú.
- [7] Kletenik, D. (1986). *Problemas de Geometría Analítica*. Editorial Latinoamericana. Lima-Perú.
- [8] Lang, S. (1990). *Cálculo*. Addison Wesley Iberoamericana. México.
- [9] Larson, R. y Edwards B. H. (2010). *Calculus* (9 ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning. USA.
- [10] Lehmann, C. H. (1990). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa S. A. de C.V. México.
- [11] Nagle, R., Saff, E. y Snider, A. (2012). *Fundamentals of Differential Equations* (8 ed.). Pearson Education. Inc. USA.
- [12] Rainville, E., Bedient P. y Bedient R. (1997). *Elementary Differential Equations* (8 ed.). Prentice Hall. USA.

-
- [13] Simmons, G. (1993). *Ecuaciones Diferenciales* (2 ed.). Ed.Mc. Graw Hill. España.
 - [14] Spiegel, M. (1983). *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas* (3 ed.). Ed. Prentice Hall. México.
 - [15] Zill, D. y Wright, W. (2012). *Differential Equations With Boundary-Value Problems* (8 ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning. USA.
 - [16] Zill, D. (2012). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (10 ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning. USA.



ELY OLIVER GUARDIA JARA

Matemático de profesión; con grado académico de Magister en Matemática Pura, obtenido en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Profesor Principal del Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNALM. Tiene a cargo la enseñanza de los cursos de Cálculo, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Métodos Numéricos de Modelización Matemática.



VÍCTOR TREJO CADILLO

Ingeniero Agrícola y Profesor Principal del Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNALM. Obtuvo el grado de Mestre em Engenharia Civil en el área de concentración de Ingeniería hidráulica, por la Escuela Politécnica de la Universidad de Sao Paulo, Brasil. Ha sido Jefe de la Oficina Académica de Estudios, jefe del Dpto. Académico de Matemática y Coordinador en el CEPRE-UNALM. Ha impartido los cursos de Matemática I y II, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, entre otros.

Los autores aprovechan su experiencia académica para presentar el libro *Cálculo para Ciencias*, con la intención de proporcionar un fundamento sólido de los conceptos básicos del cálculo y una introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y, al mismo tiempo, señalar la trascendencia e importancia de la matemática en la solución de problemas que se presentan en la vida real. El libro es adecuado para los estudiantes de ciencias e ingeniería, cuya relación con las aplicaciones puede proporcionar una experiencia motivadora y alentadora. El único requisito matemático esencial es haber cursado cálculo diferencial e integral en la universidad.

El libro está organizado por capítulos y, en cada uno de ellos se comienza por establecer las definiciones, propiedades y teoremas de los temas a tratar en él.

Además de los ejemplos que ilustran y aclaran los conceptos teóricos expuestos, se presenta al final una lista de ejercicios propuestos que ayudará a reforzar los conocimientos adquiridos.



Fondo Editorial
Universidad Nacional Agraria La Molina